BULLETIN DE LA S. M. F.

M. SERVANT

Sur une extension des formules de Gauss

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 92-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__92_0>

SUR UNE EXTENSION DES FORMULES DE GAUSS;

Par M. SERVANT.

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étendre les formules de Gauss au cas d'une variété à deux dimensions contenue dans un espace à quatre dimensions, ou, si l'on veut, de définir intrinsèquement une surface dans l'espace $n=4$.

I. Soit $S(xyzt)(uv)$ une variété quelconque connue et soit

$$ds^2 = S\,dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

son élément linéaire; soient $cc'c''c'''$, $c_1c'_1c''_1c'''_1$ deux directions rectangulaires entre elles et perpendiculaires aux tangentes de la variété; on aura

$$(1)\quad Sc\frac{\partial x}{\partial u} = Sc\frac{\partial x}{\partial v} = Scc_1 = Sc_1\frac{\partial x}{\partial u} = Sc_1\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Sc^2 = 1, \qquad Sc_1^2 = 1.$$

Posons

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Sc\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -S\dfrac{\partial c}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} = D, \\ Sc\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -S\dfrac{\partial c}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} = -S\dfrac{\partial c}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} = D', \qquad Sc\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -S\dfrac{\partial c}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} = D'', \\ Sc_1\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = D_1, \qquad Sc_1\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = D'_1, \qquad Sc_1\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = D''_1, \\ Sc_1\dfrac{\partial c}{\partial u} = -Sc\dfrac{\partial c_1}{\partial u} = \delta, \qquad Sc_1\dfrac{\partial c}{\partial v} = -Sc\dfrac{\partial c_1}{\partial v} = \delta''. \end{array}\right.$$

Nous pouvons poser, comme dans le cas de l'espace ordinaire,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v} + Pc + P_1c_1$$

et déterminer les quatre quantités M, N, P, P_1; car le déterminant $\left|\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,cc_1\right| = \sqrt{EG-F^2}$ n'est pas nul en général; on trouve ainsi facilement les formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ {11 \atop 1} \right\}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left\{ {11 \atop 2} \right\}\dfrac{\partial x}{\partial v} + Dc + D_1c_1, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \left\{ {12 \atop 1} \right\}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\dfrac{\partial x}{\partial v} + D'c + D'_1c_1, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ {22 \atop 1} \right\}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left\{ {22 \atop 2} \right\}\dfrac{\partial x}{\partial v} + D''c + D''_1c_1; \end{array}\right.$$

on peut également trouver, d'une façon analogue, les formules suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial u} = m\,\dfrac{\partial x}{\partial u} + n\,\dfrac{\partial x}{\partial v} + \delta c_1, & \dfrac{\partial c_1}{\partial u} = m_1\dfrac{\partial x}{\partial u} + n_1\dfrac{\partial x}{\partial v} - \delta c, \\ \dfrac{\partial c}{\partial v} = m'\dfrac{\partial x}{\partial v} + n'\dfrac{\partial x}{\partial v} + \delta'' c_1, & \dfrac{\partial c_1}{\partial u} = m'_1\dfrac{\partial x}{\partial u} + n'_1\dfrac{\partial x}{\partial v} - \delta'' c. \end{cases}$$

où m, n, ... ont les valeurs suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} m = \dfrac{\mathrm{FD} - \mathrm{GD}}{\mathrm{H}^2}, \quad n = \dfrac{\mathrm{FD} - \mathrm{ED}'}{\mathrm{H}^2}, \quad m_1 = \dfrac{\mathrm{FD}'_1 - \mathrm{GD}_1}{\mathrm{H}^2}, \quad \ldots, \\ m' = \dfrac{\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}'}{\mathrm{H}^2}, \quad n' = \dfrac{\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}''}{\mathrm{H}^2}, \quad \ldots; \end{cases}$$

on a encore les relations (Darboux)

$$(6)\quad \begin{cases} m'\mathrm{E} + (n' - m)\mathrm{F} - n\mathrm{G} = 0, & mn' - nm' = \dfrac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{H}^2}, \\ m'_1\mathrm{E} + (n'_1 - m_1)\mathrm{F} - n_1\mathrm{G} = 0, & m_1 n'_1 - n_1 m'_1 = \dfrac{\mathrm{D}_1\mathrm{D}''_1 - \mathrm{D}'^2_1}{\mathrm{H}^2}. \end{cases}$$

Écrivons maintenant les conditions d'intégrabilité des systèmes d'équations (3) et (4). Considérons d'abord le système (3); nous verrons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right);$$

en remplaçant dans ces expressions les dérivées secondes de x par leurs valeurs déduites des formules (3) et les dérivées de c et c_1 par leurs valeurs déduites des formules (4), il viendra deux expressions de la forme

$$\alpha\,\frac{\partial x}{\partial v} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{Y}c + \delta c_1 = 0,$$
$$\alpha'\frac{\partial x}{\partial v} + \beta'\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{Y}'c + \delta' c_1 = 0;$$

ces équations devant être vérifiées quand on remplace x par y, z, t, les $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ devront être identiquement nuls; or il vient, en écrivant que α, β, α', β' sont nuls,

$$\frac{DD''-D'^2+D_1D_1''-D_1'^2}{H^2}E = \left\{12,12\right\},\qquad KF = \left\{11,21\right\} = \left\{22,12\right\},$$
$$KG = \left\{21,21\right\},$$

où l'on a posé

$$\frac{DD''-D'^2+D_1D_1''-D_1'^2}{H^2} = K;$$

or, si l'on se reporte aux formules générales des formes quadratiques linéaires (Bianchi, *Lezioni di Geometria*, Chap. II), on voit que ces quatre équations se réduisent à une seule

$$K = \frac{(12,12)}{H^2}, \tag{7}$$

qui exprime que la quantité K est égale à la courbure totale du ds^2 de la variété.

Écrivons maintenant que $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$ sont nuls; il vient, par un calcul facile,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D'}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}D+\left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]D'+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}D''+D_1'\delta-D_1\delta''=0,\\
&\frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}D+\left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]D'-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}D''-D_1''\delta+D_1'\delta''=0,\\
&\frac{\partial D_1}{\partial v}-\frac{\partial D_1'}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}D_1+\left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]D_1'+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}D_1''+D\delta''-D'\delta=0,\\
&\frac{\partial D_1''}{\partial u}-\frac{\partial D_1'}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}D_1+\left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]D_1'-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}D_1''+D'\delta''-D''\delta=0.
\end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant les conditions d'intégrabilité des équations (4); pour cela écrivons $\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}$ de deux manières; il vient

$$\begin{aligned}
&(m-n')\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+n\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-m'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m'}{\partial u}\right)\\
&\quad+\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial n}{\partial v}-\frac{\partial n'}{\partial u}\right)+\delta\frac{\partial c_1}{\partial v}-\delta''\frac{\partial c_1}{\partial u}+\left(\frac{\partial \delta}{\partial v}-\frac{\partial \delta''}{\partial u}\right)c_1=0;
\end{aligned}$$

cette équation doit être également vérifiée quand on remplace x par y, z, t; si donc on multiplie par $\frac{\partial x}{\partial u}$ et que l'on fasse la somme, on trouve une des équations (8), de même si l'on multiplie par $\frac{\partial x}{\partial v}$; multiplions maintenant par c, il viendra de suite

$$(m-n')D'+nD''-m'D=0; \tag{9}$$

multiplions maintenant par c_1, il viendra

$$(10) \qquad (m-n')D'_1 + nD''_1 - m'D_1 + \frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{\partial\delta''}{\partial u} = 0;$$

il est facile de voir que l'équation (9) est toujours identiquement vérifiée; on obtiendra une nouvelle équation de même forme que (10) en écrivant $\frac{\partial^2 c_1}{\partial u\,\partial v}$ sous deux formes différentes; cette équation sera

$$(11) \qquad (m_1 - n'_1)D' + n_1 D'' - m'_1 D - \frac{\partial\delta}{\partial v} + \frac{\partial\delta''}{\partial u} = 0.$$

Les équations fondamentales de la théorie des surfaces dans l'espace $n=4$ sont donc au nombre de six; ce sont celles inscrites sous les numéros (7), (8), (9) et (11); elles se réduisent à cinq, car les équations (9) et (11) sont identiques, ainsi que l'on peut le vérifier facilement; ces deux équations peuvent être remplacées par l'équation unique

$$(12) \qquad H^2\left(\frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{\partial\delta''}{\partial u}\right) + \begin{vmatrix} E & F & G \\ D & D' & D'' \\ D_1 & D'_1 & D''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

II. *Les formules de Codazzi.* — Établissons maintenant, pour les surfaces de l'espace à quatre dimensions, des formules analogues à celle de Codazzi. La théorie des rotations et translations a été étendue à l'espace à quatre dimensions par Thomas Craig et M. Hatzidakis (*A. S. M.*, 1898, 1900); nous en déduirons facilement les formules que nous voulons obtenir.

Prenons, dans le plan tangent de la surface, deux directions rectangulaires, α_i, β_i, et dans le plan normal conservons les deux séries de cosinus directeurs c et c_1; on aura

$$S\alpha^2 = S\beta^2 = Sc^2 = Sc_1^2 = 1,$$
$$S\alpha\beta = S\alpha c = S\alpha c_1 = S\beta c = S\beta c_1 = Scc_1 = 0.$$

Nous poserons

$$p_{34} = Sc_1\frac{\partial c}{\partial u}, \quad p_{12} = S\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \quad p_{13} = S\alpha\frac{\partial c}{\partial u}, \quad p_{23} = Sc\frac{\partial\beta}{\partial u},$$
$$p_{14} = Sc_1\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \quad p_{24} = Sc_1\frac{\partial\beta}{\partial u}, \quad p'_{34} = Sc_1\frac{\partial c}{\partial v}, \quad \ldots;$$

il vient de suite

$$
(13) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial u} &= p_{12}\beta - p_{13}c + p_{14}c_1, \\
\frac{\partial \beta}{\partial u} &= -p_{12}\alpha + p_{23}c + p_{24}c_1, \\
\frac{\partial c}{\partial u} &= p_{13}\alpha - p_{23}\beta + p_{34}c_1, \\
\frac{\partial c_1}{\partial u} &= -p_{14}\alpha - p_{24}\beta - p_{34}c,
\end{aligned}
\right.
$$

et quatre équations toutes semblables pour définir les dérivées par rapport à v de α, β, c, c_1, que l'on obtient en remplaçant les p par les p'. Les quantités p et p' seront liées par les six équations fondamentales

$$
(14) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{12}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{12}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{13} & p_{23} \\ p'_{13} & p'_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{14} & p_{24} \\ p'_{14} & p'_{24} \end{vmatrix} = 0, \\
&\frac{\partial p_{13}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{13}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{23} & p_{12} \\ p'_{23} & p'_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{34} & p_{14} \\ p'_{34} & p'_{14} \end{vmatrix} = 0, \\
&\frac{\partial p_{14}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{14}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{12} & p_{24} \\ p'_{12} & p'_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{13} & p_{34} \\ p'_{13} & p'_{34} \end{vmatrix} = 0, \\
&\frac{\partial p_{23}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{23}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p'_{12} & p'_{13} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{24} & p_{34} \\ p'_{24} & p'_{34} \end{vmatrix} = 0, \\
&\frac{\partial p_{24}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{24}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{14} & p_{12} \\ p'_{14} & p'_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{34} & p_{23} \\ p'_{34} & p'_{23} \end{vmatrix} = 0, \\
&\frac{\partial p_{34}}{\partial v} - \frac{\partial p'_{34}}{\partial u} + \begin{vmatrix} p_{13} & p_{14} \\ p'_{13} & p'_{14} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{23} & p_{24} \\ p'_{23} & p'_{24} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on désigne par ξ, η, ζ, τ les translations, on voit de suite que les deux dernières devront êtres nulles, le polyèdre à quatre dimensions devant être tangent à la surface; les coordonnées d'un point de la surface sont données par les équations

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha\xi + \beta\eta, \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= \alpha\xi' + \beta\eta',
\end{aligned}
$$

et l'on a entre les translations et les rotations les relations fondamentales

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial\xi'}{\partial u}+p_{12}\eta'-p'_{12}\eta=0,\\&\frac{\partial\eta}{\partial v}-\frac{\partial\eta'}{\partial u}+p_{12}\xi'-p'_{12}\xi=0,\\&p_{13}\xi'-p'_{13}\xi-p_{23}\eta'+p'_{23}\eta=0,\\&-p_{14}\xi'+p'_{14}\xi-p_{24}\eta'+p'_{24}\eta=0,\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit de suite des équations de Craig en annulant ζ et τ.

Par cette méthode, on a donc dix équations que doivent vérifier les *coordonnées intrinsèques* de la surface. Cherchons à relier ces quantités à celles, E, F, G, D, D', ..., introduites précédemment.

On aura d'abord immédiatement

$$E=\xi^2+\eta^2,\qquad F=\xi\xi'+\eta\eta',\qquad G=\xi'^2+\eta'^2.$$

Nous aurons ensuite

$$D=-S\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=-S(p_{13}\alpha-p_{23}\beta+p_{34}c_1)(\alpha\xi+\beta\eta),$$

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}D&=p_{23}\eta-p_{13}\xi\\D'&=p_{23}\eta'-p_{13}\xi'=p'_{23}\eta-p'_{13}\xi,\\D''&=p'_{23}\eta'-p'_{13}\xi'\\D_1&=p_{14}\xi+p_{24}\eta\\D'_1&=p_{14}\xi'+p_{24}\eta'=p'_{14}\xi+p'_{24}\eta,\\D''_1&=p'_{14}\xi'+p'_{24}\eta'\\&\delta=p_{34},\qquad\delta''=p'_{34},\end{aligned}\right.$$

formules qui permettent de passer de l'un des systèmes de formules à l'autre. Les deux premières équations des translations peuvent servir à calculer p_{12}, p'_{12} qui ne dépendent que de l'élément linéaire; les deux dernières sont identiques en vertu des formules (6); on retrouve donc bien les six équations que nous avons obtenues précédemment.

Rappelons encore les formules suivantes :

$$
(17)\left\{
\begin{aligned}
& dx + \xi\, du + \xi' dt && + (p_{12} du + p'_{12} dv) y - (p_{13} du + p'_{13} dv) z \\
& && + (p_{14} du + p'_{14} dv) t, \\
& dy + \eta\, du + \eta' dv && - (p_{12} du + p'_{12} dv) x + (p_{23} du + p'_{23}) z \\
& && + (p_{24} du + p'_{24} dv) t, \\
& dz && + (p_{13} du + p'_{13} dv) x - (p_{23} du + p'_{23} dv) y \\
& && + (p_{34} du + p'_{34} dv) t, \\
& dt && - (p_{14} du + p'_{14} dv) x - (p_{24} du + p'_{24}) y \\
& && - (p_{34} du + p'_{34} dv) z,
\end{aligned}
\right.
$$

qui donnent les projections sur les axes mobiles du déplacement infinitésimal d'un point.

Les deux systèmes de formules que nous avons donnés contiennent une indétermination; en effet, dans le premier cas, les quantités c et c_1 ne sont pas entièrement déterminées et, dans le cas des formules de Codazzi, c, c_1 ainsi que α et β ne sont pas complètement déterminées.

Examinons d'abord ce que deviennent les formules de Gauss quand on change les valeurs de c et c_1. On peut, de la façon la plus générale, prendre pour valeur des cosinus

$$C = c \cos\varphi + c_1 \sin\varphi, \qquad C_1 = - c \sin\varphi + c_1 \cos\varphi;$$

il viendra de suite

$$\mathfrak{D} = \mathrm{S}\,C \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{D} \cos\varphi + \mathrm{D}_1 \sin\varphi, \qquad \mathfrak{D}_1 = - \mathrm{D} \sin\varphi + \mathrm{D}_1 \cos\varphi,$$

$$\Delta = \delta + \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \Delta'' = \delta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial v};$$

on voit, en particulier, que l'on peut toujours déterminer φ de façon à annuler une des quantités suivantes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, ..., $\Delta\Delta''$.

Voyons maintenant ce que deviennent les formules de Codazzi; nous poserons

$$\alpha_1 = \alpha \cos\psi + \beta \sin\psi, \qquad \beta_1 = - \alpha \sin\psi + \beta \cos\psi,$$

$$C = c \cos\varphi + c_1 \sin\varphi, \qquad C_1 = - c \cos\varphi + c_1 \cos\varphi,$$

il vient de suite

$$P_{12} = (-\alpha\sin\psi + \beta\cos\psi)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cos\psi + \frac{\partial\beta}{\partial u}\sin\psi + \alpha\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial u} + \beta\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)$$
$$= p_{12} + \frac{\partial\psi}{\partial u},$$
$$P_{13} = p_{13}\cos\psi\cos\varphi - p_{14}\cos\psi\sin\varphi - p_{13}\sin\psi\cos\varphi - p_{14}\sin\psi\sin\varphi,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$P_{34} = \Delta;$$

on peut donc, en particulier, annuler deux des rotations.

III. *Lignes tracées sur les surfaces.* — Étant donnée une surface $S(xyzt)(uv)$, on peut, en général, déterminer d'une seule façon A, B, C, L, M de telle sorte que x, y, z, t soient solutions de l'équation

$$(18)\qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + L\frac{\partial\theta}{\partial u} + M\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

A, B, ... se calculent facilement à l'aide des formules de Gauss; il vient, en effet, en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs et en annulant les coefficients des termes en $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}cc_1$

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + B\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + C\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + L = 0,\\ &A\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + B\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + C\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + M = 0,\\ &AD + BD' + CD'' = 0,\\ &AD_1 + BD'_1 + CD''_1 = 0,\end{aligned}\right.$$

équations qui permettent de déterminer A, B, C, ... à un facteur près. Les caractéristiques de l'équation (1) supposées distinctes traceront sur la surface un réseau conjugué; on voit donc, contrairement à ce qui se passe dans l'espace ordinaire, qu'il y a, en général, sur une surface, un seul système conjugué.

On peut encore définir ces lignes d'une façon différente. Cherchons l'intersection du *plan* tangent avec le plan infiniment voisin; elle sera évidemment définie par les formules suivantes [en employant les formules (17)] :

$$z = 0,\qquad t = 0\qquad (p_{13}\,du + p'_{13}\,dv)x - (p_{23}\,du + p'_{23}\,dv)y = 0,$$
$$(p_{14}\,du + p'_{14}\,dv)x + (p_{24}\,du + p'_{24}\,dv)y = 0;$$

l'équation du réseau conjugué s'obtient en éliminant x, y entre les deux dernières équations; on voit de suite l'analogie avec l'espace à trois dimensions.

Nommons, avec M. Guichard, *réseau de ligne de courbure ou réseau* O un réseau conjugué tel que Sx^2 soit solution de l'équation de Laplace (18) relative au réseau. Si l'on adopte cette définition, on voit qu'en général une surface n'a pas de lignes de courbure. La condition pour que l'équation (18) admette la solution Sx^2 est

$$AE + BF + CG = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ D & D' & D'' \\ D_1 & D'_1 & D''_1 \end{vmatrix} = 0;$$

on voit alors facilement que l'on peut toujours déterminer les normales à la surface de telle sorte que δ et δ'' soient nuls. Les normales formeront alors des congruences et le plan normal enveloppe une surface développable (*voir* Guichard, *S.M.*, 1896).

A l'aide des formules qui précèdent on peut généraliser un grand nombre de propositions de Géométrie infinitésimale, surfaces applicables, surfaces de Weingarten, etc.; quelques-unes seraient sans intérêt, mais d'autres ont des applications immédiates à la Géométrie ordinaire que nous espérons indiquer prochainement.