BULLETIN DE LA S. M. F.

E. FABRY

# Sur le genre des fonctions entières

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 30 (1902), p. 165-176
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__165_1>

## SUR LE GENRE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. Eugène Fabry.

1. Soit

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

une fonction entière de genre fini. On sait que $\frac{\log |c_n|}{n}$ tend vers o, et que $\frac{\log |c_n|}{n \log n}$ a une limite supérieure négative, lorsque $n$ devient infini; soit $\frac{-1}{\rho}$ cette plus grande limite. De sorte que, quel que soit $\varepsilon$, on aura $\sqrt[n]{|c_n|} < n^{\varepsilon - \frac{1}{\rho}}$ à partir d'une valeur déterminée de $n$, et $\sqrt[n]{|c_n|} > n^{-\varepsilon - \frac{1}{\rho}}$ pour une infinité de valeurs de $n$. Le genre de la fonction $f(x)$ dépend, en général, de l'ordre de grandeur des coefficients $c_n$. Si $\rho$ n'est pas entier, $f(x)$ est d'ordre $\rho$ et son genre est le nombre entier $p$ immédiatement inférieur à $\rho$, c'est-à-dire que la fonction peut se mettre sous la forme

$$f(x) = e^{G(x)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p}$$

où G est un polynome de degré au plus égal à $p$.

Si $\rho$ est un nombre entier, et si $n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}$ ne tends pas vers o, la fonction est de genre $\rho$. Mais si $n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}$ tend vers o, le genre peut être $\rho$ ou $\rho - 1$.

Dans un important Mémoire, publié récemment (*Acta Societatis scientiarum fennicæ*, t. XXXI), M. Lindelöf s'est proposé de préciser la détermination du genre d'une fonction entière donnée par son développement en série. Il cherche si, lorsque $\rho$ est entier, $n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}$ tendant vers o, le genre, qui est $\rho$ ou $\rho - 1$, ne serait pas lié à la convergence ou divergence de la série $\sum (\sqrt[n]{|c_n|})^\rho$, et il arrive à une conclusion négative en montrant qu'il existe d'une part des fonctions de genre $\rho$ telles que $\sum (\sqrt[n]{|c_n|})^\rho$ soit une série convergente, d'autre part des fonctions telles que cette série soit divergente, et qui sont de genre $\rho - 1$. Cela montre bien que le genre ne dépend pas uniquement de l'ordre de grandeur des coefficients $c_n$, puisque, lorsque $\rho$ n'est pas entier, le genre $p$ augmente avec l'ordre de grandeur de $|c_n|$.

M. Lindelöf donne les exemples suivants :

1° La fonction $f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n(\log n)^\alpha}\right)$ où $1 < \alpha \leqq 2$ est de genre o, et cependant la série $\sum_0^\infty \sqrt[n]{|c_n|}$ est divergente;

2° La fonction $f(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{x}{n^2 \log n^2}\right)^{n^2}$, pour laquelle $\sqrt[n]{|c_n|}$ est une série convergente, est de genre 1.

Cependant M. Lindelöf, tout en indiquant les raisons qui doivent faire admettre ces résultats comme très probables, n'en donne pas une démonstration rigoureuse. Je me propose ici de compléter ces résultats, en démontrant en toute rigueur les faits signalés.

**2.** Considérons d'abord le premier exemple. Soit, d'une façon plus générale, une fonction de genre o, n'ayant que des racines négatives

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

$a_n$ représente une suite de quantités positives qui croissent avec $n$, et $\sum \frac{1}{a_n}$ est une série convergente. On a

$$c_n = \sum \sum \cdots \sum \frac{1}{a_{\nu_1} a_{\nu_2} \cdots a_{\nu_n}}$$

où $0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n$, soit

$$S = n!\, c_n = \sum\sum\cdots\sum \frac{1}{a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots a_{\nu_n}}$$

où $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ sont des nombres entiers arbitraires, mais tous différents.

Posons

$$A = \sum_1^\infty \sum_2^\infty \cdots \sum_n^\infty \frac{1}{a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots a_{\nu_n}}$$

où $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ peuvent être quelconques, pourvu que

$$\nu_1 > 0, \qquad \nu_2 > 1, \qquad \ldots, \qquad \nu_n > n-1.$$

On a $S > A$. En effet S et A ont des termes communs; A contient en plus les termes où deux indices sont égaux, tandis que S contient en plus les termes où l'un des indices est tel que $\nu_p < p$. On peut faire correspondre ces termes non communs de façon que tout terme de S soit supérieur au terme correspondant de A. Pour cela, soit un terme de S tel que $\nu_p = p' < p$ et $\nu_{p'} \geqq p$, on remplacera $\nu_p$ par $\nu_{p'}$ pour avoir le terme correspondant de A. Inversement si, dans un terme de A, $\nu_p = \nu_{p'} \geqq p > p'$, on remplacera $\nu_p$ par $p'$ pour avoir le terme de S correspondant.

Plus généralement si, dans un terme S, on a $\nu_p = p' < p$, $\nu_{p'} = p''$, $\nu_{p''} = p'''$, ..., on remplacera $\nu_p$ par la première des quantités $p', p'', p''', \ldots$ qui est au moins égale à $p$. En opérant ainsi sur chaque indice $\nu_p < p$, on a un terme de A correspondant et inférieur au terme de S. Inversement, dans un terme de A, soit $\nu_p = \nu_{p'}$, $p > p'$, aucun autre indice entre $\nu_p$ et $\nu_{p'}$ n'étant égal à $\nu_p$. Si aucun indice $\nu$ du terme considéré n'est égal à $p'$ on remplacera $\nu_p$ par $p'$. Sinon, soit $\nu_{p''} = p'$ l'indice de rang inférieur égal à $p'$; $\nu_{p'''} = p''$ l'indice de rang inférieur égal à $p''$; et ainsi de suite jusqu'à $\nu_{p_\lambda} = p_{\lambda-1}$, aucun indice du terme considéré n'étant égal à $p_\lambda$. On a alors

$$p > p' > p'' > \cdots > p_\lambda.$$

On remplacera $\nu_p$ par $p_\lambda$, et en opérant ainsi sur chaque indice du terme de A, on retrouve le terme correspondant de S. Les termes non communs de A et de S se correspondent ainsi deux à deux, chaque terme de l'une des suites correspond à un seul terme de l'autre, et le terme de S est toujours supérieur au terme de A. Comme ces suites sont des séries convergentes, il en résulte que $S > A$.

$$c_n > \frac{1}{n!}\sum_1^\infty \frac{1}{a_\nu}\sum_2^\infty \frac{1}{a_\nu}\sum \cdots \sum_n^\infty \frac{1}{a_\nu} > \frac{1}{n!}\left(\sum_n^\infty \frac{1}{a_\nu}\right)^n > \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{e\sqrt{n}}\left(\sum_n^\infty \frac{1}{a_\nu}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{n}\left(1 - \frac{2+\log n}{2n}\right)\sum_n^\infty \frac{1}{a_\nu}.$$

Soit $a_n = \varphi(n)$ fonction croissante de $n$; on a encore

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{n}\left(1 - \frac{2+\log n}{2n}\right)\int_n^\infty \frac{dx}{\varphi(n)}.$$

Pour la fonction

$$f(x) = \prod_{n_0}^\infty \left[1 + \frac{x}{n(\log n)^\alpha}\right] \qquad (1 < \alpha \leqq 2),$$

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)(\log n)^{\alpha-1}},$$

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{\alpha - 1}\left[1 - \frac{2+\log n}{n}\right]\frac{1}{n(\log n)^{\alpha-1}}.$$

Ici $\rho = 1$, la série $\sum \sqrt[n]{c_n}$ est divergente, bien que la fonction soit de genre o.

Le même résultat s'applique à la fonction

$$f(x) = \prod_{n_0}^\infty \left[1 + \frac{x}{n(\log n)^2(\log\log n)^\alpha}\right] \qquad (0 < \alpha \leqq 1),$$

car ici

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x\log^2 x(\log\log x)^\alpha} > \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\log\log n}}\int_n^\infty \frac{1 + \frac{\alpha}{\log\log x}}{x\log^2 x(\log\log x)^\alpha}\,dx$$

$$= \frac{1}{\log n(\log\log n)^\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{\log\log n}\right)}$$

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{n\log n(\log\log n)^\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{\log\log n} - \frac{2+\log n}{2n}\right).$$

3. Nous allons maintenant étudier le genre de la fonction

$$\sum_{n_0}^{\infty}\left[\frac{x}{n^2\log(n^2)}\right]^{n^2}.$$

Ici $\sqrt[n]{c_n}=\frac{1}{n\log n}$ lorsque $n$ est un carré, $\sqrt[n]{c_n}=0$ si $n$ n'est pas un carré. On a $\rho=1$, $n\sqrt[n]{c_n}=\frac{1}{\log n}$ ou $0$, et tend vers $0$. Représentons par $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ les zéros de la fonction ; nous allons démontrer que la série $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|$ est divergente, et il en résultera que la fonction est de genre $1$, bien que la série $\sum\sqrt[n]{|c_n|}=\sum\frac{1}{n^2\log(n^2)}$ soit convergente.

Considérons la série plus générale

$$f(x)=\sum_{n_0}^{\infty}\left(\frac{x}{\gamma n^{\alpha}\log\beta n}\right)^{n^{\alpha\rho}}=\sum u_n$$

où $\log n_0>1$, $\rho$ et $\alpha$ étant des nombres entiers, $\alpha\rho\geqq 2$ et $\beta>0$. Si $\nu=n^{\alpha\rho}$, $\frac{\log|c_\nu|}{\nu\log\nu}=-\frac{1}{\rho}-\frac{\log\gamma+\beta\log\log n}{\alpha\rho\log n}$ tend vers $-\frac{1}{\rho}$ et $\nu^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[\nu]{c_\nu}=\frac{1}{\gamma\log\beta n}$ tend vers $0$. La série $\sum\left(\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\right)^{\rho}=\sum\frac{1}{\gamma^{\rho}n^{\alpha\rho}\log\beta^{\rho}n}$ est convergente. Nous allons voir que la fonction est cependant de geure $\rho$.

On a

$$\frac{d\log u_n}{dn}=n^{\alpha\rho-1}\left(\alpha\rho\log\frac{x}{\gamma}-\alpha^2\rho\log n-\alpha\beta\rho\log\log n-\alpha-\frac{\beta}{\log n}\right);$$

la dérivée de ce dernier facteur par rapport à $n$ est

$$-\frac{1}{n}\left(\alpha^2\rho+\frac{\alpha\beta\rho}{\log n}-\frac{\beta}{\log^2 n}\right)<0.$$

Il en résulte que, pourvu que $x$ soit plus grand que

$$\gamma n_0^{\alpha}\log\beta n_0\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n_0}},$$

$u_n$ augmente avec $n$, puis diminue constamment. Si $x$ est choisi de façon que $u_{n+1} = u_{n-1}$, $u_n$ sera le plus grand terme. On a alors

$$\log x = \log\gamma + \alpha\log(n+1) + \beta\log\log(n+1) + (n-1)^{\alpha\rho}\,\frac{\alpha\log\dfrac{n+1}{n-1} + \beta\log\dfrac{\log n+1}{\log n-1}}{(n+1)^{\alpha\rho}-(n-1)^{\alpha\rho}}$$
$$= \alpha\log n + \beta\log\log n + \log\gamma + \frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\alpha\rho\log n} + \frac{\alpha(2\alpha\rho-3)}{6n^2} + \ldots.$$

Donnons à $\log|x|$ la valeur plus simple obtenue en négligeant les termes infiniment petits par rapport à $\frac{1}{n}$ et soit

$$x = \gamma n^{\alpha}\log^{\beta} n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}}\, e^{\omega i}.$$

Pour toute valeur de $\nu$, positive ou négative, on a

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| = \frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}-n^{\alpha\rho}}{\rho} - \alpha(n+\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{n+\nu}{n}$$
$$-\beta\left[(n+\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{\log n+\nu}{\log n} - \frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}-n^{\alpha\rho}}{\alpha\rho\log n}\right],$$

dont le coefficient de $\beta$ a le signe de

$$-\log\frac{\log(n+\nu)}{\log n} + \frac{1-\left(\dfrac{n}{n+\nu}\right)^{\alpha\rho}}{\alpha\rho\log n},$$

dont la dérivée par rapport à $\nu$

$$\frac{1}{(n+\nu)^{\alpha\rho+1}}\left[\frac{n^{\alpha\rho}}{\log n} - \frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}}{\log(n+\nu)}\right]$$

a le signe de $-\nu$, car $n+\nu \geqq n_0$, le coefficient de $\beta$ est donc négatif, et

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < \frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}-n^{\alpha\rho}}{\rho} - \alpha(n+\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{n+\nu}{n}.$$

Lorsque $\nu > 0$, on en déduit

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < -\frac{\alpha^2\rho}{2}\nu^2 n^{\alpha\rho-2},$$

car la différence

$$\frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}-n^{\alpha\rho}}{\rho} - \alpha(n+\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{n+\nu}{n} + \frac{\alpha^2\rho}{2}\nu^2 n^{\alpha\rho-2},$$

qui s'annule avec $\nu$, a pour dérivée

$$\alpha^2 \rho\, n^{\alpha\rho-1}\left[\frac{\nu}{n} - \left(\frac{n+\nu}{n}\right)^{\alpha\rho-1}\log\frac{n+\nu}{n}\right] \leqq \alpha^2 \rho\, n^{\alpha\rho-1}\left(\frac{\nu}{n} - \frac{n+\nu}{n}\log\frac{n+\nu}{n}\right) < 0.$$

Lorsque $\nu < 0$, $\frac{\nu}{n}$ peut varier entre 0 et $-1$, et l'on a

$$-\log\frac{n+\nu}{n} > -\frac{\nu}{n} > -\frac{\nu}{n}\,\frac{1+(\alpha\rho-1)\frac{\nu}{n}}{\left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha\rho-1}}.$$

Il en résulte que la fonction

$$\frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}-n^{\alpha\rho}}{\alpha\rho} - (n+\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{n+\nu}{n} + \frac{\alpha\rho}{2}\nu^2\left(1+2\,\frac{\alpha\rho-1}{3}\,\frac{\nu}{n}\right)n^{\alpha\rho-2}$$

croît lorsque $\frac{\nu}{n}$ varie de $-1$ à 0, et, par suite, reste négative, et

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < \frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}-n^{\alpha\rho}}{\rho} - \alpha(n+\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{n+\nu}{n}$$
$$< -\frac{\alpha^2\rho}{2}\nu^2 n^{\alpha\rho-2}\left(1+2\,\frac{\alpha\rho-1}{3}\,\frac{\nu}{n}\right).$$

Supposons d'abord $\alpha\rho = 2$, $\alpha = 2$ si $\rho = 1$, ou $\alpha = 1$ si $\rho = 2$. Lorsque $\nu > 0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < e^{-\nu^2},$$

si $\nu < 0$,

$$\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < e^{-\nu^2\left(1+\frac{2}{3}\frac{\nu}{n}\right)}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots}{u_n}\right| < e^{-1}+e^{-2^2}+\ldots+e^{-\nu^2}+\ldots < 0,4.$$

Si $\nu < \sqrt{n}$

$$\left|\frac{u_{n-\nu}}{u_n}\right| < e^{-\nu^2\left(1-\frac{2}{3\sqrt{n}}\right)},$$

$\left|\frac{u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_{n-\nu}}{u_n}\right|$ sera inférieur à une quantité qui, lorsque $n$ augmente indéfiniment, a pour limite $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2}$.

Enfin, si $\nu$ est compris entre $n$ et $\sqrt{n}$,

$$\left|\frac{u_{n-\nu}}{u_n}\right| < e^{-\frac{\nu^2}{3}} < e^{-\frac{n}{3}},$$

$$\left|\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_{n-\nu}}{u_n}\right| < n e^{-\frac{n}{3}},$$

expression qui tend vers o lorsque $n$ devient infini.

Donc, lorsque $n$ dépasse une limite bien déterminée, le module de $f(x) - u_n$ est inférieur au module de $u_n$.

Lorsque la variable $x$ décrit la circonférence de rayon $\gamma n^\alpha \log^\beta n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}}$, les arguments de $f(x)$ et de $\left(\frac{x}{\gamma n^\alpha \log^\beta n}\right)^{n^{\alpha\rho}}$ ont la même variation, et ces deux fonctions ont, dans ce cercle, le même nombre de racines, c'est-à-dire $n^{\alpha\rho}$. Entre les deux circonférences de rayons

$$\gamma n^\alpha \log^\beta n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}} \quad \text{et} \quad \gamma (n+1)^\alpha \log^\beta (n+1)\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log (n+1)}},$$

il y donc $(n+1)^{\alpha\rho} - n^{\alpha\rho}$ racines. Et la série $\sum_{n_1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^\theta$ est comprise entre les deux séries

$$\sum \frac{(n+1)^{\alpha\rho} - n^{\alpha\rho}}{\left(\gamma n^\alpha \log^\beta n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}}\right)^\theta} \quad \text{et} \quad \sum \frac{n^{\alpha\rho} - (n-1)^{\alpha\rho}}{\left(\gamma n^\alpha \log^\beta n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}}\right)^\theta}$$

qui sont convergentes ou divergentes en même temps que la série

$$\sum \frac{n^{\alpha\rho-1}}{(n^\alpha \log^\beta n)^\theta};$$

ces séries sont donc convergentes si $\theta > \rho$, ou si $\theta = \rho$, $\beta\rho > 1$.

La fonction $f(x)$ est donc d'ordre $\rho$; elle sera de genre $\rho - 1$ si $\beta\rho > 1$, car alors les séries $\sum \frac{1}{n \log^{\beta\rho} n}$, $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho$ sont convergentes. Elle est de genre $\rho$ si $\beta\rho \leqq 1$.

Ainsi lorsque $\beta \leqq \frac{1}{\rho}$, $f(x)$ est une fonction de genre $\rho$ telle que la série $\sum \left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)^\rho = \sum \left(\frac{1}{\gamma n^\alpha \log^\beta n}\right)^\rho$ converge.

En particulier $\sum\left[\dfrac{x}{n^2\log(n^2)}\right]^{n^2}$ est de genre 1, $\sum\left(\dfrac{x}{n\log^\beta n}\right)^{n^2}$ est de genre 2 si $\beta \leqq \frac{1}{2}$.

Si $\alpha\rho > 2$, $n^{\alpha\rho-2}$ augmente indéfiniment avec $n$, et les relations précédentes montrent que, lorsque

$$|x| = \gamma n^\alpha \log^\beta n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}},$$

$\dfrac{f(x)-u_n}{u_n}$ tend vers o lorsque $n$ devient infini. Cela permet de généraliser les résultats précédents en supposant que les exposants des termes non nuls de $f(x)$ ne suivent pas une loi aussi régulière.

**4.** Soit

$$f(x) = \sum\left(\frac{x}{\gamma n^\alpha \log^\beta n}\right)^{P_n}$$

où les exposants entiers $P_n$ augmentent de façon que l'on ait

$$\left|\frac{P_n - n^{\alpha\rho}}{n^{\alpha\rho-2}}\right| < k < \left(\frac{\alpha\rho}{2}\right)^2,$$

$\rho$ est encore un nombre entier, $\alpha$ et $\beta$ des quantités positives quelconques, et l'on suppose $\alpha\rho > 2$.

Soit encore

$$x = \gamma n^\alpha \log^\beta n\, e^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}}\, e^{\omega i},$$

on a

$$|u_n| > e^{\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}\right)(n^\alpha - k n^{\alpha\rho-2})},$$

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < \frac{(n+\nu)^{\alpha\rho}}{\rho}\left[1-\left(\frac{n}{n+\nu}\right)^{\alpha\rho} - \alpha\rho\log\frac{n+\nu}{n}\right] + \frac{k}{\rho}n^{\alpha\rho-2}\left(1+\frac{\beta}{\alpha\log n}\right)$$
$$+ k(n+\nu)^{\alpha\rho-2}\left|\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n} - \alpha\log\frac{n+\nu}{n} - \beta\log\frac{\log n+\nu}{\log n}\right|.$$

Mais si $\nu$ croît de $-n$ à o et $+\infty$, $\dfrac{1-\left(\dfrac{n}{n+\nu}\right)^{\alpha\rho}}{\log\dfrac{n+\nu}{n}}$ décroît constamment de $+\infty$ à $\alpha\rho$ et o.

Donc, si $\nu \geqq 1$, on a

$$\frac{1-\left(\frac{n}{n+\nu}\right)^{\alpha\rho}}{\log\frac{n+\nu}{n}} \leqq \frac{1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha\rho}}{\log\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha\rho}{n}\left[1-\frac{\alpha\rho+1}{2n}+\frac{(\alpha\rho+1)(\alpha\rho+2)}{3n^2}\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$< \alpha\rho\left[1-\frac{\alpha\rho}{2n}+\frac{(\alpha\rho+1)^2}{3n(2n-1)}\right]$$

et pourvu que l'on ait $n > \frac{1}{2}+\frac{(\alpha\rho+1)^2}{3\alpha\rho}$, on en déduit

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < (n+\nu)^{\alpha\rho-2}\left\{-\nu\frac{\alpha}{2}\left[\alpha\rho-\frac{(\alpha\rho+1)^2}{3(2n-1)}\right]+\frac{2k}{\rho}+\frac{2k\beta}{\alpha\rho\log n}+\frac{k\alpha\nu}{n}+\frac{k\beta\nu}{n\log n}\right\}.$$

Expression de la forme $(n+\nu)^{\alpha\rho-2}(\mu-\lambda\nu)$ où $\lambda-\mu$ a pour limite

$$\frac{\alpha^2\rho}{2}-\frac{2k}{\rho}>0;$$

il existe donc une valeur de $n$ à partir de laquelle $\lambda-\mu$ est positif et $n^{\alpha\rho-2}(\lambda-\mu)$ augmente indéfiniment. On peut donc supposer $n^{\alpha\rho-2}(\lambda-\mu)$ aussi grand que l'on voudra pourvu que $n$ dépasse une valeur déterminée, et l'on pourra poser

$$\log\left|\frac{u_{n+\nu}}{u_n}\right| < \mu-\lambda\nu \qquad \text{où} \qquad e^{\lambda-\mu} > \theta > 3$$

$$\left|\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots}{u_n}\right| < \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\mu-\lambda\nu} < \frac{1}{\theta-1} < \frac{1}{2}.$$

On a de même, si $\nu \geqq 1$,

$$\frac{\left(\frac{n}{n-\nu}\right)^{\alpha\rho}-1}{\log\frac{n}{n-\nu}} \geqq \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha\rho}-1}{\log\left(\frac{n}{n-1}\right)} > \frac{\alpha\rho\left(1+\frac{\alpha\rho+1}{2n}\right)}{n\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n-1)^2}\right]} > \alpha\rho\left[1+\frac{\alpha\rho}{2n}-\frac{\alpha\rho+5}{4(n-1)^2}\right]$$

$$\log\left|\frac{u_{n-\nu}}{u_n}\right| < (n-\nu)^{\alpha\rho}\log\frac{n}{n-\nu}\left[-\frac{\alpha^2\rho}{2n}+\alpha\frac{\alpha\rho+5}{4(n-1)^2}\right]$$

$$+\frac{2k}{\rho}n^{\alpha\rho-2}\left(1+\frac{\beta}{\alpha\log n}\right)+k(n-\nu)^{\alpha\rho-2}\nu\left(\alpha+\frac{\beta}{\log n-\nu}\right).$$

Supposons $\frac{\nu}{n} < \varepsilon$ et $n > 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2\alpha\rho}$, on en déduit

$$\log\left|\frac{u_{n-\nu}}{u_n}\right| < n^{\alpha\rho-2}\left\{-\frac{\nu\alpha}{2}(1-\varepsilon)^{\alpha\rho}\left[\alpha\rho - \frac{\alpha\rho+5}{2(n-1)^2}n\right]\right.$$
$$\left.+\frac{2k}{\rho}\left(1+\frac{\beta}{\alpha\log n}\right)+k\frac{\nu}{n}\left[\alpha+\frac{\beta}{\log n(1-\varepsilon)}\right]\right\}.$$

On peut choisir $\varepsilon$ assez petit pour que, à partir d'une valeur déterminée de $n$, lorsque $\nu < n\varepsilon$, on ait encore

$$\log\left|\frac{u_{n-\nu}}{u_n}\right| < \mu - \lambda\nu$$

$$\left|\frac{u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_{n-\nu}}{u_n}\right| < \frac{e^{\mu-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} < \frac{1}{\theta-1} < \frac{1}{2}.$$

D'autre part, si $\nu > n\varepsilon$,

$$\log\left|\frac{u_{n-\nu}}{u_n}\right| < \frac{n^{\alpha\rho}}{\rho}\left\{-1+(1-\varepsilon)^{\alpha\rho}[1-\alpha\rho\log(1-\varepsilon)]\right.$$
$$\left.+\frac{2k}{n^2}\left(1+\frac{\beta}{\alpha\log n}\right)+\frac{k\rho\nu}{n^2(n-\nu)}\left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{\alpha\rho-2}\left(\alpha+\frac{\beta}{\log n-\nu}\right)\right\}.$$

$$(1-\varepsilon)^{\alpha\rho}[1-\alpha\rho\log(1-\varepsilon)] < 1-\frac{\alpha^2\rho^2\varepsilon^2}{2} < 1.$$

Soit $\varepsilon' < \frac{(\alpha\rho\varepsilon)^2}{2\rho}$; lorsque $n$ dépasse une valeur déterminée, on aura

$$\log\frac{u_{n-\nu}}{u_n} < -n^{\alpha\rho}\varepsilon'$$

$$\left|\frac{u_{n_1}+\ldots+u_{n-\nu}}{u_n}\right| < ne^{-\varepsilon' n^{\alpha\rho}}$$

qui tend vers o. Il existe donc une valeur de $n$ à partir de laquelle, lorsque $|x| = y_n = \gamma n^\alpha \log^\beta n . n^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho\log n}}$, $\left|\frac{f(x)}{u_n} - 1\right|$ reste plus petit que 1.

Il en résulte encore que les fonctions $f(x)$ et $\left(\frac{x}{\gamma n^\alpha \log^\beta n}\right)^{p_n}$ ont, dans la circonférence de rayon $y_n$, $p_n$ racines, et $p_{n+1} - p_n$ entre les deux circonférences de rayons $y_{n+1}$ et $y_n$.

La série $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|^\theta$ est comprise entre les deux séries

$$\sum\frac{p_{n+1}-p_n}{y_n^\theta} \quad \text{et} \quad \sum\frac{p_n-p_{n-1}}{y_n^\theta};$$

ou entre

$$\sum \frac{(n+1)^{\alpha\rho} - n^{\alpha\rho} + k\left[(n+1)^{\alpha\rho-2} + n^{\alpha\rho-2}\right]}{\left(\gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n . n^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho \log u}}\right)^{\theta}}$$

et

$$\sum \frac{n^{\alpha\rho} - (n-1)^{\alpha\rho} - k\left[n^{\alpha\rho-2} + (n-1)^{\alpha\rho-2}\right]}{\left(\gamma n^{\alpha} \log^{\beta} n . n^{\frac{1}{\rho}+\frac{\beta}{\alpha\rho \log n}}\right)^{\theta}}$$

qui sont convergentes et divergentes en même que $\sum \frac{n^{\alpha\rho-1}}{(n^{\alpha} \log^{\beta} n)^{\theta}}$. On en déduit que $f(x)$ est d'ordre $\rho$, et de genre $\rho$ si $\beta\rho \leqq 1$.

Ainsi, lorsque $\alpha > \frac{2}{\rho}$, $\beta \leqq \frac{1}{\rho}$, on a une fonction de genre $\rho$, telle que la série $\sum \left(\sqrt[n]{c_n}\right)^{\rho}$ soit convergente.