BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Sur l'approximation des racines réelles des équations

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 176-177

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__176_1>

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS;

Par M. A. Pellet.

Étant donnés deux nombres a et b comprenant une seule racine X de l'équation $f(x) = 0$, pour appliquer la méthode d'approximation de Newton, on suppose qu'entre ces limites aucune des trois premières dérivées de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ne s'annule, et l'on part de la limite a, qui donne pour $f(x)$ et $f''(x)$ des valeurs de même signe. Alors la quantité $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1$ est comprise entre a et X, la racine, mais la différence $X - a_1$ peut être d'un module bien supérieur à celui de $\frac{f(a)}{f'(a)}$, de sorte que l'application de la méthode est peu avantageuse. Il n'en est plus ainsi si l'on suppose en outre remplie la condition

$$f'^2(a) - 2f(a)f''(a) \geqq 0.$$

Alors la fonction $f'^2(x) - 2f(x)f''(x)$, qui est positive pour $x = a$ et $x = X$, et dont la dérivée $-2f(x)f'''(x)$ ne s'annule pas entre ces limites, est positive de $x = a$ à $x = b$; et l'on en déduit que, pour toute valeur x comprise entre a et X, les deux quantités

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$$

comprennent entre elles la racine X. Ainsi $X - a_1$ est alors de même signe et de module moindre que $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, comme aussi que $-2\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$, par suite que $-\frac{\mathrm{M}f'(a)}{f'^2(a)-\mathrm{M}f(a)}\frac{f^2(a)}{f'^2(a)}$, M étant de même signe et de module au moins égal au module maximum de $f''(x)$ entre a et X.

Supposons $f(a)$ et $f(b)$ positifs, $f'(a)$ et $f'(b)$ de signes contraires, et $f''(x)$ positif et allant en croissant de a à b. S'il y a une racine X entre a et b, on a

$$f(a)+(\mathrm{X}-a)f'(a)+(\mathrm{X}-a)^2\frac{f''(\xi)}{2}=0,$$

ξ étant un nombre intermédiaire entre a et b. Il en résulte que X rend négatives les expressions

$$(1)\qquad \begin{cases} f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2, \\ f(b)+f'(b)(x-b)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-b)^2; \end{cases}$$

et positives les expressions

$$(2)\qquad \begin{cases} f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(b)}{2}(x-a)^2, \\ f(b)+f'(b)(x-b)+\dfrac{f''(b)}{2}(x-b)^2. \end{cases}$$

D'autre part, $f'^2(a)-2f(a)f''(a)$ étant positive, la racine la plus voisine de a doit être comprise entre $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ et $a-2\frac{f(a)}{f'(a)}$. Ainsi, dans cet intervalle il doit y avoir des quantités rendant négatives les expressions (1) et positives les expressions (2), sans quoi il n'y a pas de racine de l'équation $f(x)=0$ entre a et b.