BULLETIN DE LA S. M. F.

E. ESTANAVE

Sur les coefficients des développements en série de *tangx*, *scx* et d’autres fonctions. Caractères de périodicité que présentent les chiffres des unités de ces coefficients

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 220-226
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__220_1>

SUR LES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE *tang x*, *séc x* ET D'AUTRES FONCTIONS. CARACTÈRES DE PÉRIODICITÉ QUE PRÉSENTENT LES CHIFFRES DES UNITÉS DE CES COEFFICIENTS;

Par M. E. Estanave.

Dans cette Note, je résume ma Communication en la dégageant des démonstrations qui nécessitent d'assez longs développements de calcul. J'ai indiqué dans un Mémoire : *Essai sur la somma-*

tion de quelques séries trigonométriques, p. 96, que les nombres d'Euler satisfont à la loi suivante :

$$E_{2p+1} = \text{mult. } 10 + 1, \qquad E_{2p} = \text{mult. } 10 + 5.$$

J'ai indiqué comment, en partant de la formule de récurrence qui définit E_n à l'aide des nombres d'Euler d'indice moindre, on peut démontrer la généralité de cette loi, qui est apparente sur les premiers nombres.

Cette démonstration générale peut se ramener à établir les identités numériques suivantes :

$$\sum_{q=1}^{q=p} C_{2(2p+1)}^{4q} = m\,10 + 5, \qquad \sum_{q'=1}^{q'=2p-1} C_{2(2p+1)}^{2q'} = m\,10 + 5,$$

$$\sum_{q'=1}^{q'=2p-1} C_{4p}^{2q'} = m\,10 + 6, \qquad \sum_{q=1}^{q=p-1} C_{4p}^{4q} = m\,10.$$

où q' prend seulement les valeurs impaires 1, 3, 5, ..., et p les valeurs de la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, .. , et où C_n^p désigne le nombre de combinaisons n objets p à p.

La seconde des identités se ramène d'ailleurs à la première, grâce à la relation $C_m^p = C_m^{m-p}$. Dans cette Communication, je me suis proposé d'établir ces identités numériques et d'étendre à d'autres séries de nombres A et D, imaginées par M. Désiré André dans des Mémoires relatifs aux permutations alternées (*Journal de Liouville,* 1881, p. 167) et aux permutations quasi-alternées (*Journal de Liouville,* 1895, p. 315), les remarques d'observation que j'ai faites sur le chiffre des unités à propos des nombres d'Euler.

La démonstration des identités numériques ci-dessus se déduit du développement de $(x+1)^m$. Si l'on considère, en effet, le développement

$$(x+1)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} x + 1$$

et si l'on y remplace x par les racines de l'équation $x^4 - 1 = 0$, en donnant à m, dans les quatre relations obtenues, les valeurs $2(2p+1)$ ou $4p$ suivant qu'on a en vue d'établir les deux premières identités ou les deux dernières, on obtient, en combinant par addition ou soustraction, les quatre relations qui correspondent à la même valeur de m, la somme des coefficients binomiaux de 4 en 4, qui est indiquée sous le signe $\sum$. On trouve ainsi

$$\sum_{q=1}^{q=p} C_{2(2p+1)}^{4q} = 2^{4p}-1, \qquad \sum_{q'=1}^{q'=2p-1} C_{4p}^{2q'} = 2^{2p-1}(2^{2p-1}-\cos p\pi),$$

$$\sum_{q=1}^{q=p-1} C_{4p}^{4q} = 2^{2p-1}(2^{2p-1}+\cos p\pi)-2.$$

Il est alors facile de voir, d'après l'expression du second membre, que la première somme est un entier terminé par 5, la deuxième est un entier terminé par 6 et la troisième un entier terminé par 0. Toutefois, pour ces deux dernières, la démonstration peut se scinder en deux suivant que p est pair ou impair.

M. Désiré André définit les nombres A et D de la manière suivante :

$2A_n$ représente le nombre de permutations alternées de n lettres et $2D_n$ le nombre de permutations quasi-alternées de ces n lettres distinctes, et établit diverses relations entre les nombres A et D, notamment la relation

$$(1) \qquad D_n = A_{n+1} - 2A_n.$$

que nous prendrons ici pour définition des nombres D.

Si nous considérons les développements de $\operatorname{tang} x$ et de $\operatorname{séc} x$, signalés par M. André,

$$\operatorname{tang} x = A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots + A_{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{séc} x = A_0 + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + \ldots + A_{2p} \frac{x^{2p}}{2p!} + \ldots,$$

et si nous comparons ces développements à ceux déjà établis à l'aide des nombres de Bernoulli (B) et des nombres d'Euler (E), nous voyons que ces nombres sont liés aux nombres A par les relations

$$A_{2p-1} = \frac{2^{2p}(2^{2p}-1)}{2p} B_p, \qquad A_{2p} = E_p,$$

que, pour simplifier l'exposition, nous pouvons prendre comme définition des nombres A. Nous verrons plus loin que la considération des nombres A peut, avec avantage et logique, remplacer la considération des nombres de Bernoulli et des nombres d'Euler.

Cela étant, si l'on observe les valeurs des premiers nombres de la série A et D,

$$\begin{array}{lllll}
A_0 = 1, & A_1 = 1, & A_2 = 1, & A_3 = 2, & \\
A_4 = 5, & A_5 = 16, & A_6 = 61, & A_7 = 272, & \\
A_8 = 1385, & A_9 = 7936, & A_{10} = 50521, & A_{11} = 353792, & \ldots, \\
D_0 = -1, & D_1 = -1, & D_2 = 0, & D_3 = 1, & \\
D_4 = 6, & D_5 = 29, & D_6 = 150, & D_7 = 841, & \\
D_8 = 5166, & D_9 = 34649, & D_{10} = 253050, & D_{11} = 1994581, & \ldots.
\end{array}$$

On *aperçoit,* en mettant à part A_0, A_1, D_0, D_1, une périodicité dans le chiffre des unités de ces nombres, qui est, pour les nombres A, 1, 2, 5, 6 et 0, 1, 6, 9, pour les nombres D. En sorte que, en supposant que cette périodicité que nous constatons pour les premiers nombres soit vraie pour la suite entière et en disposant les nombres A et D suivant quatre colonnes :

$$\begin{array}{cccc}
A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\
A_6 & A_7 & A_8 & A_9 \\
A_{10} & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \\
D_6 & D_7 & D_8 & D_9 \\
D_{10} & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots,
\end{array}$$

les nombres du Tableau A seront terminés par 1, 2, 5, 6 suivant qu'ils sont situés dans la première, deuxième, troisième ou quatrième colonne; les nombres du Tableau D seront terminés par 0, 1, 6, 9 suivant qu'ils appartiennent à la première, deuxième, troisième ou quatrième colonne. La recherche du chiffre des unités de A_μ et D_λ revient, par suite, à la recherche de la colonne où se rangent ces nombres dans la classification précédente.

Si l'on pose

$$\mu = 4q + r,$$

le reste r sera 2, 3, 0 ou 1 et indiquera que A_μ est situé dans la première, deuxième, troisième ou quatrième colonne. Ainsi, A_{5342} qui, à n'en pas douter, est un nombre très considérable, sera situé dans la première colonne et sera de la forme $m\,10 + 1$, tandis que

A_{237} sera situé dans la quatrième colonne et sera de la forme $m\,10+6$.

La démonstration générale de ces caractères est facile et résulte de ce qui a été dit. D'abord les nombres de la première colonne du Tableau A sont terminés par l'unité, grâce à la relation

$$A_{2p}=E_p$$

et ceux de la troisième colonne sont terminés par 5, d'après ce que j'ai déjà dit des nombres d'Euler.

Pour démontrer que ceux de la deuxième colonne sont terminés par 2 et ceux de la quatrième par 6, on peut faire appel à la relation donnée par M. André

$$(2)\quad A_{2n+1}=C_{2n+1}^{1}A_{2n}-C_{2n+1}^{3}A_{2n-2}+C_{2n+1}^{5}A_{2n-4}-\ldots\pm C_{2n+1}^{2n+1}A_0.$$

Et, en supposant la loi vraie pour n, c'est-à-dire en supposant que

$$A_{4n-2}\quad A_{4n-1}\quad A_{4n}\quad A_{4n+1}$$

obéissent à la loi, démontrer que

$$A_{4n+2}\quad A_{4n+3}\quad A_{4n+4}\quad A_{4n+5}$$

y satisfont aussi.

Comme je viens de le remarquer, cela est déjà fait pour A_{4n+2}, A_{4n+4}. Pour le voir, pour les nombres A_{4n+3}, A_{4n+5}, il suffit de remplacer dans la relation (2) n par $2n+1$ et $2n+2$ et de grouper ensuite dans le second membre les termes positifs et les termes négatifs. On voit ainsi aisément que la démonstration se ramène à l'établissement des deux relations numériques

$$\sum_{q=1}^{q=p} C_{4p+3}^{4q}=m\,10+5,\qquad \sum_{q=1}^{q=p+1} C_{4p+5}^{4q}=m\,10+5,$$

que l'on peut établir en suivant la même méthode que j'ai déjà indiquée et remplaçant, dans les deux membres du développement de $(x+1)^m$, m par $4p+3$ ou $4p+5$.

La loi étant démontrée pour les nombres A, on voit immédiatement, grâce à la relation

$$D_n=A_{n+1}-2A_n,$$

que la loi signalée pour les nombres D est aussi satisfaite. J'ai dû ici me borner à indiquer seulement les résultats en raison de la longueur qu'entraînerait le développement des calculs.

Nous venons de considérer quatre séries de nombres; les nombres de Bernoulli B, les nombres d'Euler E, et les séries de nombres A et D. Nous avons vu que la considération des nombres A permet de se passer de la considération des nombres B et E. On a, en effet,

$$B_p = \frac{2p}{2^{2p}(2^{2p}-1)} A_{2p-1}, \qquad E_p = A_{2p}.$$

De plus, les nombres A définissent les nombres D. Je laisserai au lecteur le soin de décider s'il n'y aurait pas avantage à considérer seulement la série des nombres A et me bornerai ici à signaler quelques raisons qui peuvent éclairer ce choix.

1° Les nombres A forment une série unique de nombres définissant très simplement les nombres B, E et D;

2° Les nombres A sont des nombres entiers, de même les nombres E et D, mais les nombres B sont fractionnaires.

3° Les nombres A, et c'est sur ce point que j'insiste, ont une existence par eux-mêmes, indépendante des développements de la tangente et de la sécante où ils rentrent comme coefficients de la même manière que C_m^p entre comme coefficient du terme en x^p dans le développement de $(x+1)^m$.

Ces nombres A, je l'ai déjà dit, représentent quelque chose; $2A_n$ est le nombre de permutations alternées de n lettres. De même que C_m^p représente le nombre de combinaisons de n lettres p à p. On ne saurait en dire autant des nombres de Bernoulli et des nombres d'Euler dont l'existence est subordonnée à celles du développement de la tangente et de la sécante.

Ces nombres, il est vrai, s'introduisent dans plusieurs questions, notamment dans la sommation des séries, mais il sera facile de les y remplacer par les nombres A.

De plus ces nombres A figurent, d'une façon simple, dans les développements d'autres fonctions :

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^2}{2!} + A_3\frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$\frac{1-2\cos x}{1-\sin x} = D_0 + D_1\frac{x}{1!} + D_2\frac{x^2}{2!} + D_3\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

et

$$(\text{séc}\,x - 2)\,\text{séc}\,x = D_0 + D_2 \frac{x^2}{2!} + D_4 \frac{x^4}{4!} + D_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$(\text{séc}\,x - 2)\,\text{tang}\,x = D_1 \frac{x}{1!} + D_3 \frac{x^3}{3!} + D_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

D'autre part, grâce à la considération des nombres A, les développements de *tangx* et de *sécx* sont ainsi rapprochés l'un de l'autre; l'honneur de ce rapprochement revient à M. Catalan. M. Désiré André a montré la signification combinatoire de ces nombres. Grâce aux observations que nous avons signalées sur la périodicité du chiffre des unités de ces nombres, on peut, sans calcul, affirmer que tel nombre, si considérable soit-il, ne fait pas partie de la suite des nombres A ou de la suite D.

Ce caractère de périodicité du chiffre des unités des nombres A est peut-être une raison de plus en faveur du choix de ces nombres.

Remarque. — La relation (2) entre les nombres A et les relations entre ces nombres et les nombres d'Euler et de Bernoulli montrent la dépendance qui existe entre ces deux dernières séries de nombres.

J'ai mis [1] cette dépendance plus en évidence en établissant la formule

$$E_p = 2^{2p+2}\,2p!\sum_{q=0}^{q=p}(-1)^q \frac{2^{2(p-q)-1}-1}{2^{2q+1}(2q+1)!\,2(p-q)!}B_{p-q}$$

où l'on a posé par convention $B_0 = -1$ et $0! = 1$. Cette formule permet d'exprimer le développement de la sécante à l'aide des nombres de Bernoulli.

---

[1] *Essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques*, p. 91.