BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

La développée moyenne et les surfaces applicables

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

LA DÉVELOPPÉE MOYENNE ET LES SURFACES APPLICABLES;

Par M. de Montcheuil.

I.

Interprétation géométrique d'une forme quadratique particulière. — L'étude des propriétés relatives à la surface, lieu des centres de courbure d'une surface donnée, a permis de déterminer un certain nombre de surface applicables. On sait, par exemple, que les deux nappes de la surfaces des centres de courbure relative à une surface de M. Weingarten sont applicables sur une surface de révolution [1].

A la surface, lieu des extrémités du segment focal, substituons la surface, lieu du milieu de ce segment; en d'autres termes, considérons la développée moyenne ponctuelle de la surface donnée. Nous allons voir que cette surface conduit, elle aussi, à la détermination de divers couples de surfaces applicables.

Dans tout ce qui va suivre, nous exprimerons les coordonnées cartésiennes x, y, z d'une surface donnée S, de la façon que nous allons brièvement indiquer.

Soit donnée une surface S_1 enveloppe du plan mobile défini par l'équation

$$(u+u_1)x_1+i(u_1-u)y_1+(uu_1-1)z_1+\xi=0,$$

ξ étant une fonction donnée de u et de u_1.

(1) J. Weingarten, *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen* (*Journal de Crelle*, t. LIX, 1861, p. 382).

Cette dernière fonction conservant la même valeur, déterminons quatre nouvelles fonctions de u, u_1 au moyen du système

$$
\begin{aligned}
(u+u_1)x+i(u_1-u)y+(uu_1-1)z+i(uu_1+1)\rho+\xi&=0,\\
x-iy+u_1z+iu_1\rho+\frac{\partial\xi}{\partial u}&=0,\\
x+iy+\;uz+\;iu\rho+\frac{\partial\xi}{\partial u_1}&=0,\\
z+i\rho+\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}&=0.
\end{aligned}
$$

On vérifie que les quatre fonctions $x, y, z, -i\rho$ ainsi définies représentent les coordonnées cartésiennes de la développée moyenne S et la demi-somme des rayons de courbure relative à la surface proposée S_1.

Géométriquement, ce système d'équations, formé d'une façon analogue à celui qui définit les coordonnées d'une surface, considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile, revient à envisager une surface S_1 comme l'enveloppe d'une sphère variable, dont le centre décrit sa développée moyenne S. D'ailleurs, en déterminant ainsi les éléments de la sphère, par le fait, le système définit S aussi bien que S_1.

Dans ce qui va suivre, nous considérerons donc les coordonnées d'une surface S comme exprimées au moyen du système précédent, en fonction des éléments relatifs à une surface S_1 dont elle est la développée moyenne.

Ces préliminaires établis, soient les deux systèmes de quantités x, y, z, ρ; x', y', z', ρ' relatifs à deux surfaces S, S', développées moyennes respectives de deux autres surfaces S', S'_1 caractérisées par les fonctions ξ, ξ'. Nous nous proposons de calculer la forme quadratique

$$dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'+d\rho\,d\rho'.$$

Plus généralement, nous allons calculer la forme

$$d\theta_1\,d\theta'_1+d\theta_2\,d\theta'_2+d\theta_3\,d\theta'_3+d\theta_4\,d\theta'_4 \tag{1}$$

définie comme il suit.

Soient a_α, b_α, c_α, d_α des constantes quelconques. Déterminons une fonction φ_α par la relation

$$(u+u_1)a_\alpha + i(u_1-u)b_\alpha + (uu_1-1)c_\alpha + i(uu_1+1)d_\alpha + \varphi_\alpha = 0.$$

D'après le mode de représentation d'une surface, exposé tout à l'heure, la fonction φ_α peut être considérée comme déterminant une sphère immobile de centre a_α, b_α, c_α, et de rayon $-id_\alpha$.

Cela posé, nous supposerons les fonctions θ_α données par des expressions de la forme

$$\theta_\alpha = \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u\,\partial u_1}\,\xi\right)$$

où l'on donne à α les valeurs successives 1, 2, 3, 4.

Les fonctions θ'_α se déduisent des précédentes par la substitution de la fonction ξ' à la fonction ξ.

On vérifie que les fonctions θ_α, θ'_α sont des combinaisons linéaires respectives des quantités x, y, z, ρ d'une part; x', y', z', ρ' de l'autre; et, par suite, elles les renferment à titre de cas particuliers.

Différentiant ces fonctions, on trouve

$$d\theta_\alpha = \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3\xi}{\partial u^2\,\partial u_1} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\right)du + \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3\xi}{\partial u_1^2\,\partial u} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}\right)du_1.$$

Les différentielles $d\theta'_\alpha$ seront représentées par des formules analogues.

Portant ces valeurs dans la forme quadratique (1) il vient

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} d\theta_\alpha\, d\theta'_\alpha = {} & \mathrm{A}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\varphi_\alpha^2 + \mathrm{B}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\varphi_\alpha\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1} + \mathrm{C}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\varphi_\alpha\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}\\ & + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\xi'}{\partial u^2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}\right)^2 du^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\xi'}{\partial u_1^2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}\right)^2 du_1^2\\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\xi'}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\xi'}{\partial u_1^2}\right)\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}\,du\,du_1,\end{aligned}$$

A, B, C désignant ici des fonctions des différentielles du, du_1 et des dérivées secondes et troisièmes de ξ et de ξ'.

Cela posé, cherchons à déterminer les constantes a_α, b_α, c_α, d_α

de telle sorte qu'on ait identiquement

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \varphi_\alpha^2 = 0.$$

Cette identité entraîne les suivantes

$$\sum \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} = \sum \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} = \sum \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}\right)^2 = 0.$$

Si donc on pose

$$\sum \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1} = 2\mathrm{K}^2 = \text{const.},$$

on obtient pour expression de la forme quadratique

$$(2) \qquad \sum d\theta_\alpha d\theta'_\alpha = \frac{\mathrm{K}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} \right) du\, du_1.$$

Il reste à définir le système de relations entre les seize constantes a_α, b_α, c_α, d_α, qui donne

$$\sum \varphi_\alpha^2 = 0.$$

On vérifie qu'il suffit de poser

$$\sum a_\alpha^2 = \sum b_\alpha^2 = \sum c_\alpha^2 = \sum d_\alpha^2 = \mathrm{K}^2,$$

$$\sum a_\alpha b_\alpha = \sum a_\alpha c_\alpha = \sum a_\alpha d_\alpha = \sum b_\alpha c_\alpha = \sum b_\alpha d_\alpha = \sum c_\alpha d_\alpha = 0.$$

Si l'on pose en outre

$$\mathrm{K} = 1,$$

les relations précédentes entraîneront les suivantes :

$$a_\alpha^2 + b_\alpha^2 + c_\alpha^2 + d_\alpha^2 = 1, \qquad a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta + d_\alpha d_\beta = 0.$$

On sait par là que l'identité

$$\sum \varphi_\alpha^2 = 0$$

équivaut à un système de neuf relations entre seize constantes, analogue au système des six relations entre les neuf cosinus directeurs relatifs à trois droites rectangulaires.

Le système de relations que vérifient les constantes peut s'écrire comme il suit :

$$a_\alpha^2 + b_\alpha^2 + c_\alpha^2 + d_\alpha^2 = 1,$$
$$(a_\alpha - a_\beta)^2 + (b_\alpha - b_\beta)^2 + (c_\alpha - c_\beta)^2 + (d_\alpha - d_\beta)^2 = 2,$$

formules qui donnent immédiatement l'interprétation du système de quatre sphères définies par les quatre fonctions φ_α.

La première formule exprime que les quatre sphères sont de même puissance par rapport à l'origine. La seconde exprime que la distance de deux points de contact d'une tangente commune à deux sphères est constante quel que soit le couple de sphères considéré.

Les quatre sphères sont orthogonales à la sphère de rayon 1, ayant son centre à l'origine, qui sert de représentation sphérique à la surface proposée S_1.

Si l'on pose

$$a_4 = b_4 = c_4 = d_1 = d_2 = d_3 = 0, \qquad d_4 = 1,$$

on retrouve le système des neuf cosinus; alors l'une des sphères a son centre à l'origine, et les droites qui joignent ce centre à ceux des trois autres sphères forment un système orthogonal.

On remarquera que le système des quatre sphères que nous venons de définir joue, dans les questions relatives à la développée moyenne, un rôle analogue à celui que remplit le système pentasphérique de M. Darboux, dans les questions relatives aux lignes de courbure ([1]).

Nous avons établi l'identité (2) dans l'hypothèse où les surfaces S, S' caractérisées par les fonctions ξ, ξ' avaient même représentation sphérique. Nous allons considérer cette identité comme se rapportant à des surfaces associées dans des conditions différentes.

Il est évident que ξ, ξ' étant des fonctions données de u, u_1; a_α, b_α, ... des constantes également données, l'identité subsistera, quelle que soit la signification géométrique donnée à ces quantités.

Cela posé, imaginons l'équation du plan tangent à une surface,

---

([1]) Darboux, *Th. des Surfaces*, t. I, p. 213.

définie successivement par les deux relations

$$(u+u_1)x_1+i(u_1-u)y_1+(uu_1-1)z_1+\xi=0,$$
$$(1-uu_1)x_1+i(1+uu_1)y_1+(u+u_1)z_1+\xi=0.$$

Si l'on désigne, comme précédemment, par x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, et par $-i\rho$ la demi-somme des rayons de courbure, on vérifie que les deux relations précédentes entraînent les suivantes :

$$(3)\quad (u+u_1)x+i(u_1-u)y+(uu_1-1)z+i(uu_1+1)\rho+\xi=0,$$
$$(4)\quad (1-uu_1)x+i(uu_1+1)y+(u+u_1)z+i(u_1-u)\rho+\xi=0.$$

Posons

$$x'=z,\qquad y'=-\rho,\qquad z'=-x,\qquad \rho'=y.$$

Portant ces valeurs de x, y, z, ρ dans la seconde équation, on constate qu'elle devient identique à la première.

Nous en tirons cette conséquence :

Interpréter au moyen de l'équation (4) une fonction ξ de u, u_1 interprétée d'abord au moyen de l'équation (3), revient a remplacer une relation de la forme

$$F(x,\ y,\ z,\ \rho),$$

par la relation

$$F(-z,\ \rho,\ x,\ -y).$$

Cela posé, imaginons qu'on interprète les fonctions ξ', θ_α de u, u_1 dans le premier système, et les fonctions ξ', θ'_α dans le second; dès lors, les surfaces définies respectivement par ξ, ξ' n'auront plus même représentation sphérique. Désignons par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale de la première surface; par C, C', C'' ceux relatifs à la normale de la seconde surface. Le calcul montre qu'aux points correspondants, c'est-à-dire, pour un même système de valeurs u, u_1, on aura les relations

$$C=i\frac{c''}{c'},\qquad c=i\frac{C''}{C'},$$
$$C'=\frac{1}{c'},\qquad c'=\frac{1}{C'},$$
$$C''=-i\frac{c}{c'},\qquad c''=-i\frac{C}{C'}.$$

Ces formules montrent qu'aux méridiens de l'une des surfaces correspondent les parallèles de l'autre, et réciproquement.

On voit de plus qu'à un cercle de la représentation sphérique de l'une des surfaces, parallèle au plan des x, z, correspond un cercle semblable pour la seconde.

Nous avons ainsi défini la correspondance qui relie deux à deux les points des surfaces définies par les fonctions ξ et ξ'. Il nous reste à déterminer la correspondance des fonctions θ_α, θ'_α. Interprétées dans le même système, ces fonctions sont des combinaisons linéaires identiques des quantités x, y, z, ρ d'une part; x', y', z', ρ' de l'autre, définies précédemment. Or, nous avons vu que, lorsqu'on passe de la première interprétation à la seconde, toute fonction de la forme

$$F(x, y, z, \rho)$$

devient

$$F(-z, \rho, x, -y).$$

On voit par là qu'une fonction θ'_α ne sera autre que la combinaison θ_α où l'on aura fait l'échange indiqué.

Nous pouvons donc résumer les considérations que nous venons de faire dans la proposition suivante :

ξ, ξ' *étant des fonctions données de* u, u_1, a_α, b_α, ... *des constantes également données, l'identité* (2) *a lieu entre quatre combinaisons linéaires des quantités* x, y, z, ρ *d'une part, et quatre combinaisons linéaires* x', y', z', ρ' *de l'autre; soit que* ξ, ξ' *définissent des surfaces de même représentation sphérique; soit qu'elles définissent des surfaces dont les points se correspondent de la façon que nous avons indiquée.*

Dans le premier cas, les deux groupes de combinaisons seront identiques; dans le second cas, ils se déduisent l'un de l'autre, par l'échange

$$a_\alpha,\ b_\alpha,\ c_\alpha,\ d_\alpha; \quad -c_\alpha,\ d_\alpha,\ a_\alpha,\ -b_\alpha.$$

Arrêtons-nous un instant à considérer la surface de coordonnées θ_1, θ_2, θ_3 qui devient, à titre de cas particulier, la développée moyenne de la surface définie par ξ.

De la relation

$$\sum \varphi_\alpha^2 = 0$$

on tire

(5) $$\sum \varphi_\alpha d\theta_\alpha = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\theta_\alpha = -\frac{\varphi_1 d\theta_1 + \varphi_2 d\theta_2 + \varphi_3 d\theta_3}{\varphi_4}.$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{i\varphi_1}{\varphi_4}\right)^2 + \left(\frac{i\varphi_2}{\varphi_2}\right)^2 + \left(\frac{i\varphi_3}{\varphi_4}\right)^2 = 1.$$

On peut donc considérer les quantités $\frac{i\varphi_1}{\varphi_4}$, etc. comme les cosinus directeurs d'une droite.

Si donc, par chaque point θ_1, θ_2, θ_3 de la surface nous menons une droite de direction définie par ces cosinus, d'après la relation (5), cette droite sera l'élément d'une congruence normale à une famille de surfaces. On obtiendra les surfaces de cette famille en posant $-i\theta_4 = \text{const.}$

Ainsi donc, une surface ξ étant donnée, on en déduit par de simples dérivations une congruence normale à une famille de surfaces dont l'élément linéaire renferme six constantes arbitraires.

La symétrie de la relation (5) montre qu'on obtiendra des résultats analogues, quelles que soient les trois fonctions θ_α adoptées pour coordonnées de la surface.

Si l'on suppose θ_β définie à une constante près, les coordonnées de la famille de surfaces seront définies par la formule

$$\eta_\alpha = \frac{\varphi_\beta \theta_\alpha - \varphi_\alpha \theta_\beta}{\varphi_\beta},$$

où l'on donnera à β une des quatre valeurs 1, 2, 3, 4 et à α les trois autres valeurs.

II.

Méthode pour déduire de l'identité (2) *des couples de surfaces applicables.* — Nous remarquons tout d'abord que le problème équivaut à la détermination des surfaces se correspondant par orthogonalité des éléments linéaires.

Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3; \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ les coordonnées respectives des deux surfaces, que nous supposons se correspondre par orthogonalité des éléments linéaires.

L'identité (5) devient alors

$$d\theta_4 \, d\theta'_4 = \frac{K^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2}\right) du \, du_1.$$

Remarquons d'abord qu'on ne saurait avoir

$$K^2 = 0,$$

car alors, les quantités θ_1, θ_2, θ_3 seraient liées par une relation linéaire, ce qui est contre notre hypothèse.

On vérifie que les surfaces satisfaisant l'identité précédente sont définies par le système

$$2\theta = \varphi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial u_1}\xi = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} = 0.$$

Nous avons supprimé l'indice 4 dans la première équation. Cette équation s'intègre immédiatement. Désignant par U, U_1 deux fonctions respectives de u et de u_1; par U', U'_1, U'', U''_1 leurs dérivées premières et secondes, on trouve

$$\xi = \varphi(U' + U'_1) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} U - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} U_1, \tag{6}$$

et la seconde équation prend la forme

$$U'''_1 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + U''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0. \tag{7}$$

Telle est, en définitive, l'équation dont l'intégration donnera la solution du problème.

Ainsi donc, si l'on considère comme coordonnées cartésiennes de deux surfaces $\sum$, $\sum'$ *trois combinaisons linéaires convenablement choisies des coordonnées des développées moyennes* S, S' *relatives à deux surfaces* S_1, S'_1 *ainsi que des segments focaux de celles-ci, les surfaces* $\sum$, $\sum'$ *se corres-*

pondent par orthogonalité des éléments linéaires, toutes les fois que les surfaces S_1, S'_1 *ayant même représentation sphérique seront définies par les équations* (6) *et* (7).

La proposition s'applique encore au cas où la correspondance entre les points des surfaces S_1, S'_1 serait celle de méridiens à parallèles que nous avons définie plus haut.

Nous avons vu comment il faut particulariser les constantes a_α, b_α, ..., si l'on veut que les fonctions θ_α, θ'_α représentent les coordonnées de la développée, et le segment focal correspondant.

On aura alors

$$\theta_4 = \rho = 0.$$

D'où cette conclusion

Pour que les développées moyennes S, S' *relatives à deux surfaces* S_1, S'_1 *de même représentation sphérique, se correspondent par orthogonalité des éléments linéaires, il faut que l'une des deux surfaces, par exemple* S, *soit une surface minima, et que la seconde surface* S' *soit la développée d'une surface* S'_1 *vérifiant la relation*

$$U'''_1 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + U''' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0.$$

Cette proposition établie, il est aisé de déterminer la signification géométrique de cette équation.

Remarquons, en effet, que les lignes asymptotiques de la surface minima sont données par l'équation

$$U''' du^2 + U'''_1 du_1^2 = 0.$$

D'autre part, les lignes de courbure de la surface S'_1 sont définies par la relation

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} du^2 - \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} du_1^2 = 0.$$

L'équation (7) exprime donc que les lignes asymptotiques de la surface minima correspondent aux lignes de courbure de la surface dont la développée moyenne correspond à la première par orthogonalité des éléments linéaires. Nous retrouvons ainsi un résultat signalé par M. Cosserat ([1]).

On sait que la surface la plus générale, dont les développables de la congruence des normales découpent sur la développée moyenne un réseau conjugué, s'obtient en prenant la surface la plus générale, correspondant par orthogonalité des éléments linéaires à une surface minima de même représentation sphérique que la proposée ([2]).

Cette proposition, rapprochée de celle que nous venons d'énoncer, permet de conclure que les surfaces correspondant aux surfaces minima de la façon indiquée sont précisément les surfaces données par l'équation (7).

Par tout ce que nous venons de dire, on voit l'importance du rôle géométrique que joue cette équation.

Cherchons une expression des coordonnées des surfaces découpées suivant un réseau conjugué, par les développables de la congruence des normales, à une des surfaces dont elles sont les développées moyennes.

Nous venons de voir que ces coordonnées sont définies par trois fonctions θ'_α; les constantes a_α, b_α, ... étant convenablement choisies, et la fonction ξ' qui y figure par ses dérivées, vérifiant l'équation (7).

Soit ω une solution quelconque de cette équation.

On vérifie que les relations

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} = \mathrm{U}'''\omega, \qquad \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = -\mathrm{U}_1'''\omega$$

sont compatibles et définissent des solutions de l'équation vérifiée par ω.

Or, on a

$$d\theta'_\alpha = \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\right) du + \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial^3 \xi}{\partial u_1^2 \partial u} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\right) du_1.$$

D'où l'on tire, en vertu des relations précédentes,

$$(8) \quad \theta'_\alpha = \frac{1}{2}\int\left(\varphi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial u_1} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u_1}\omega\right)\mathrm{U}''' du - \frac{1}{2}\int\left(\varphi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}\omega\right)\mathrm{U}_1''' du_1.$$

([1]) *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1893).

([2]) DARBOUX, *Th. des surfaces*, t. IV, p. 91.

Il n'est pas sans intérêt de rapprocher ces formules de celles que donne M. Darboux ([1]).

On remarquera que les fonctions φ_α jouent un rôle analogue aux fonctions θ_α de l'éminent géomètre. De part et d'autre, nous avons un système de quatre solutions, reliées par une forme quadratique, relative à une même équation aux dérivées partielles, dont la solution générale intervient dans les expressions des coordonnées.

Seulement, tandis que les fonctions θ_α, ω de M. Darboux vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial u_1} = k\theta,$$

les fonctions φ_α, ω qui figurent dans nos formules vérifient l'équation (7).

III.

Solutions diverses de l'équation (7). — Cette équation est d'abord vérifiée par le système

$$m\,\xi = \varphi_\alpha(U' + U'_1) - 2\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}U - 2\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}U_1$$

$$m'\xi' = \varphi_\alpha(U' - U'_1) - 2\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u}U + 2\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_1}U_1,$$

où m, m' représentent des constantes quelconques. On a alors

$$d\theta_\alpha = d\theta'_\alpha = 0.$$

En donnant à β les trois valeurs que ne prend pas α, on aura

$$\sum d\theta_\beta\, d\theta'_\beta = 0,$$

et nous obtenons ainsi des surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments linéaires.

Si l'on pose

$$\theta_\alpha = \rho = 0, \qquad \theta'_\alpha = \rho' = 0,$$

les deux surfaces sont des surfaces minima associées, surfaces

---

([1]) Darboux, *Th. des surfaces*, t. IV, p. 93.

dont les propriétés concordent bien avec les résultats que nous venons d'établir.

Faisons au contraire

$$\theta_\alpha = y, \qquad \theta'_\alpha = y'.$$

Il viendra

$$\sum d\theta_\beta\, d\theta'_\beta = dx\, dx' + dy\, dy' + d\rho\, d\rho' = 0.$$

Les surfaces définies par les fonctions ξ, ξ' sont des surfaces à développées moyennes planes.

La relation précédente montre qu'il suffira de relever sur le plan des x, z les segments $-i\rho$, $-i\rho'$ dans des directions telles que l'on ait $\rho\rho' > 0$, pour obtenir des surfaces se correspondant par orthogonalité des éléments linéaires.

Supposons toujours ξ donné par la relation (6), nous trouverons une seconde solution de l'équation (7) en posant

$$\zeta' = \mathrm{U}' - \mathrm{U}'_1.$$

Cette équation détermine l'ensemble des surfaces qui admettent pour développée moyenne les surfaces lieux des points également distants d'un point fixe et de la proposée.

Pour déduire de cette solution des surfaces applicables, il suffit de chercher les développées moyennes des surfaces définies par les relations

$$\zeta = \frac{\xi + \xi'}{2}, \qquad \zeta' = \frac{\xi - \xi'}{2},$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned}
x' &= -\int \frac{1+u^2}{4}\,\mathrm{U}'''\,du + \int \frac{3-u_1^2}{4}\,\mathrm{U}_1'''\,du_1, & x'' &= \int \frac{3-u^2}{4}\,\mathrm{U}'''\,du - \int \frac{1+u_1^2}{4}\,\mathrm{U}_1'''\,du,\\
y' &= i\int \frac{u^2-1}{4}\,\mathrm{U}'''\,du - i\int \frac{3+u_1^2}{4}\,\mathrm{U}_1'''\,du_1, & y'' &= -i\int \frac{3+u^2}{4}\,\mathrm{U}'''\,du + i\int \frac{u_1^2-1}{4}\,\mathrm{U}_1'''\,du,\\
z' &= \int u_1\,\mathrm{U}_1'''\,du_1, & z'' &= \int u\,\mathrm{U}'''\,du.
\end{aligned}$$

Ces deux surfaces sont des surfaces de translation, engendrées chacune au moyen d'une courbe plane quelconque et d'une courbe qui se transforme en courbe minima quand on multiplie par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sa distance au plan des xy.

Une solution ω de l'équation (7) ayant été ainsi déterminée, on pourra en déduire d'autres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ en nombre indéfini, au moyen des formules précédemment établies

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial u^2} = \omega_{n-1} U''',$$

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial u_1^2} = - \omega_{n-1} U_1'''.$$

Chaque solution introduira quatre nouvelles constantes arbitraires.

Dans le cas que nous venons de traiter, nous avons considéré une surface minima quelconque, et nous en avons déduit des solutions particulières de l'équation (7) correspondante. Nous allons maintenant considérer des surfaces minima particulières, qui nous permettront de déterminer l'intégrale générale de (7).

Il nous suffit de poser

$$U = au^3, \qquad U_1 = a_1 u_1^3,$$

a, a_1 désignant des constantes.

On a alors

$$\xi = - \frac{uu_1 + 3}{2} (au^2 + a_1 u_1^2).$$

Nous avons alors à résoudre l'équation

$$a_1 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} = 0,$$

dont on obtient la solution générale en posant

$$\xi' = F(\alpha u + \alpha_1 u_1) + F_1(\beta u + \beta_1 u_1),$$

α, α_1, β, β_1 désignant ici des constantes liées par les relations

$$a_1 \alpha^2 + a \alpha_1^2 = 0, \qquad a_1 \beta^2 + a \beta_1^2 = 0.$$

Il suffira de remplacer dans la formule (8) ω par la valeur de ξ' que nous venons de trouver pour obtenir les coordonnées des surfaces cherchées.

Si l'on fait

$$a = a_1,$$

la surface minima est celle d'Enneper. On peut faire alors

$$\alpha = \beta = 1, \qquad \alpha_1 = -\beta_1 = i.$$

Si l'on suppose maintenant que les points des deux surfaces définies par les fonctions ξ, ξ' se correspondent de méridiens à parallèles; nous avons vu que, les fonctions x, y, z, ρ restant les mêmes, les fonctions x', y', z', ρ' seront remplacées par les suivantes : $-z', \rho', x', -y'$.

Nous avons alors

$$dx'\,dz - dx\,dz' + dy\,d\rho' - dy'\,d\rho = 0.$$

Une rotation de l'une des surfaces autour de l'axe des y nous permettra d'écrire

$$dx\,dx'' + dz\,dz'' + dy\,d\rho' - dy'\,d\rho = 0.$$

Il sera aisé de déduire de là des surfaces applicables, par les procédés précédemment indiqués.

Entre autres surfaces, se correspondant par orthogonalité des éléments, nous signalerons les développées moyennes des surfaces définies respectivement par les relations

$$\xi = U' + U'_1,$$
$$\xi' = u_1(uU' - 2U) - u(u_1U'_1 - U_1).$$

On a pour les premières surfaces

$$z + i\rho = 0,$$

et pour les secondes

$$z' - i\rho' = 0.$$

La première équation définit, comme nous l'avons dit, les surfaces enveloppes d'une sphère tangente à un plan fixe, dont le centre décrit la développée moyenne. La seconde équation définit la classe des surfaces symétriques des premières par rapport au plan des xy.

Posons par exemple

$$U = cu^3, \qquad U_1 = cu_1^3.$$

Il vient

$$\xi = 3c(u^2 + u_1^2),$$
$$\xi' = cuu_1(u^2 - u_1^2).$$

Les deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments sont alors définies par des relations de la forme

$$z = \alpha(y^2 - x^2),$$
$$z' = \beta(x' + iy')^{\frac{2}{3}} + \gamma(x' - iy')^{\frac{2}{3}},$$

α, β, γ représentant des constantes.

Le paraboloïde hyperbolique défini par la première surface est la développée moyenne de la cyclide de Dupin définie par la fonction ξ.

IV.

Cas où les deux fonctions ξ, ξ' *sont identiques.* — Jusqu'ici nous avons considéré l'identité

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} d\theta_\alpha\, d\theta'_\alpha = \frac{K^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2}\right) du\, du_1,$$

comme relative à deux surfaces distinctes. Supposons maintenant que les deux surfaces, et par suite les deux fonctions ξ, ξ' qui les définissent, viennent à se confondre.

L'identité précédente prend alors la forme

$$\sum d\theta_\alpha^2 = K^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\, du\, du_1. \tag{9}$$

Si l'on désigne par ρ la demi-somme des rayons de courbure que nous avons désignée précédemment par $-i\rho$; et par x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, il vient

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\, du\, du_1. \tag{10}$$

Nous obtenons ainsi une forme de l'élément linéaire relatif à une surface quelconque, qui permet d'établir plusieurs relations entre les éléments géométriques d'une surface.

Désignons par R, R' les rayons de courbure de la surface définie par la fonction ξ; par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à cette surface; par $d\sigma$ l'élément linéaire de la sphère de rayon 1.

Nous avons ici

$$\rho = \frac{R + R'}{2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = \left(\frac{R - R'}{1 + uu_1}\right)^2,$$

$$d\sigma^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = \frac{4\, du\, du_1}{(1 + uu_1)^2}.$$

On a donc

$$ds^2 = \left[d\left(\frac{R + R'}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{R - R'}{2}\right)^2 d\sigma^2.$$

Pour

$$R + R' = 0,$$

équation des surfaces minima, on aura

$$ds^2 = R^2 d\sigma^2.$$

Pour

$$R - R' = 0,$$

équation des surfaces réglées imaginaires de Monge ([1]), on aura

$$ds^2 = dR^2.$$

On retrouve ainsi des résultats connus.

Si l'on désigne par ds_1, ds_2 les éléments linéaires relatifs aux deux nappes de la surface des centres, on trouve encore la relation

$$4\, ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2\, dR\, dR'.$$

Revenons à la relation (9) et désignons par γ l'angle que fait le segment de direction φ_1, φ_2, φ_3 passant par le point de coordonnées θ_1, θ_2, θ_3 avec l'élément linéaire en ce point.

Désignant par ds cet élément linéaire, on trouve

$$d(-i\theta_4) = ds \cos\gamma.$$

D'où

$$ds^2 \sin^2\gamma = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\, du\, du_1.$$

Or, $ds \sin\gamma$ représente la projection de l'élément linéaire ds sur une quelconque des surfaces normales au segment précédemment défini. On voit donc que si l'on fait varier les constantes a_α,

---

([1]) Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, rédigée par Liouville. 5e édition.

b_α, c_α, d_α la surface de coordonnées θ_1, θ_2, θ_3 se modifiera, la projection de son élément linéaire demeurant invariable.

Supposons maintenant que θ_1, θ_2, θ_3 représentent les coordonnées de la développée moyenne et $-i\theta_4$ le segment focal correspondant, nous pourrons énoncer la proposition suivante :

La projection de l'élément linéaire de la développée moyenne sur la surface proposée est la même aux points correspondants pour toutes les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = \mathrm{F}(uu_1);$$

F désigne ici une fonction donnée quelconque de u et de u_1.

Si le segment se réduit à o comme cas particulier, on retrouve les surfaces minima associées. Pour ces surfaces, les projections des éléments linéaires se confondent avec ces éléments et l'on a par suite des surfaces applicables.

Nous venons de voir que l'on a

$$d\rho = ds \cos\gamma.$$

D'autre part, la relation (9) montre que pour les courbes de paramètres u et u_1 on a

$$ds^2 = d\rho^2.$$

D'où

$$\cos\gamma = 1.$$

Cette formule semblerait devoir autoriser à conclure que l'on a

$$\gamma = 0.$$

Mais alors, il faudrait admettre que les normales à une surface quelconque sont tangentes à sa développée moyenne, proposition évidemment fausse.

Nous devons donc chercher une explication de la valeur trouvée pour cos γ, dans l'hypothèse de l'existence de droites isotropes, perpendiculaires aux éléments linéaires de paramètres u, u_1 relatifs à la développée moyenne et situées dans un même plan avec ces éléments et la normale à la proposée.

Soumettant cette hypothèse au calcul, nous trouvons la congruence définie par le système

$$\frac{X-\theta_1}{\varphi_4\, d\theta_4\, d\theta_1+\varphi_1\, ds^2}=\frac{Y-\theta_2}{\varphi_4\, d\theta_4\, d\theta_2+\varphi_2\, ds^2}$$
$$=\frac{Z-\theta_3}{\varphi_4\, d\theta_4\, d\theta_3+\varphi_3\, ds^2}=\frac{\sqrt{(X-\theta_1)^2+(Y-\theta_2)^2+(Z-\theta_3)^2}}{i\varphi_4\sqrt{\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}}\,du\,du_1};$$

ds désigne ici un élément linéaire donné quelconque de la développée moyenne qui a pour coordonnées θ_1, θ_2, θ_3.

On voit que pour $du=0$ ou $du_1=0$ les formules précédentes définissent une congruence isotrope. Alors les coordonnées de ces droites vérifient le système

$$(X-\theta_1)^2+(Y-\theta_2)^2+(Z-\theta_3)^2=0,$$
$$(X-\theta_1)\,d\theta_1+(Y-\theta_2)\,d\theta_2+(Z-\theta_3)\,d\theta_3=0,$$

les différentielles $d\theta_1$, $d\theta_2$, $d\theta_3$ prenant successivement les valeurs correspondant aux courbes de paramètres u et u_1.

Nous obtenons ainsi deux systèmes de droites, caractéristiques respectives des surfaces réglées, enveloppes du cône isotrope, dont le sommet décrit les courbes de paramètres u et u_1.

Ces considérations nous permettent de formuler la proposition suivante :

Soit M *un point quelconque de la développée moyenne* S *relative à une surface donnée* S_1. *Considérons sur* S *les deux courbes correspondant aux génératrices rectilignes de la représentation sphérique de* S_1 *et passant par le point* M*; les deux plans tangents au cône isotrope de sommet* M *qui enveloppent respectivement ces deux courbes donneront par leur intersection la normale à* S_1.

Si S est une surface de translation, la surface S_1 sera définie par l'équation [1]

$$\frac{\partial^4\xi}{\partial u^2\,\partial u_1^2}=0.$$

[1] *Voir* thèse de doctorat : *Sur une classe de surfaces*, 1902.

Nous allons laisser de côté l'étude de l'identité (9), considérée dans sa forme la plus générale, et nous nous bornerons au cas où ξ est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = U' U'_1,$$

U', U'_1 désignant les dérivées premières de deux fonctions respectives de u et de u_1.

La relation (10) prend alors la forme

$$ds^2 = d\rho^2 + dU \, dU_1,$$

identité qu'on peut encore écrire

$$ds^2 = d\rho^2 + \left[d\left(\frac{U + U_1}{2}\right)\right]^2 + \left[d\left(i \frac{U_1 - U}{2}\right)\right]^2.$$

Posons

$$x' = \frac{U + U_1}{2},$$

$$y' = i \frac{U_1 - U}{2},$$

$$z' = \rho.$$

Il viendra

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

et les surfaces de coordonnées x, y, z; x', y', z' seront applicables.

Ces surfaces seront donc données par le système

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left[(u + u_1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\right], & x' = \frac{U + U_1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}\left[(u_1 - u)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\right], & y' = i\frac{U_1 - U}{2}, \\ z = \frac{1}{2}\left[(u u_1 - 1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u\frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi\right], & z' = \frac{1}{2}\left[(u u_1 + 1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u\frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi\right]. \end{cases}$$

On prendra pour ξ une solution quelconque de l'équation

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = U' U'_1.$$

Le problème est donc ramené à la résolution de cette équation.

Les surfaces définies par cette équation jouissent d'une propriété caractéristique.

De la relation

$$ds^2 = d\rho^2 + dU\,dU_1,$$

on tire

$$ds^2 \sin^2\gamma = dU\,dU_1.$$

Cette formule montre que l'équation précédente définit les surfaces sur lesquelles les triangles infinitésimaux, projections des triangles infinitésimaux formés avec l'élément linéaire de la développée moyenne, peuvent être déplacés sans déformation.

Ces formules jouissent donc d'une propriété analogue à celle des surfaces développables.

On peut encore chercher les relations qui existent entre les surfaces de coordonnées x, y, z d'une part, x', y', z' de l'autre.

Nous venons de voir que ces surfaces sont applicables.

De plus, la relation $z' = \rho$ montre que la distance des premières à la surface définie par ξ est égale à la distance des secondes au plan des xy.

Enfin, la relation $ds^2 - d\rho^2 = dx'^2 + dy'^2 = dU\,dU_1$ montre que la projection de l'élément linéaire de la première sur la surface définie par ξ, est égale à la projection de l'élément linéaire sur le plan des xy.

Considérons d'abord le cas particulier où la solution de l'équation (12) est de la forme

$$\xi = 2FF_1,$$

F, F_1 désignant des fonctions respectives de u et de u_1.

Étant donné le but que nous poursuivons, nous pouvons sans inconvénient nous donner *a priori* les fonctions F, F_1 et déterminer ensuite U, U_1 par la condition que l'équation aux dérivées partielles proposée admette cette valeur de ξ. Il suffira évidemment de poser

$$U' = 2F''F,$$
$$U'_1 = 2F''_1 F_1.$$

Le couple de surfaces applicables est alors donné par le système

$$
\begin{aligned}
x &= F'_1(uF' - F) + F'(u_1 F'_1 - F_1),\\
y &= iF'_1(F - uF') + iF'(u_1 F'_1 - F_1),\\
z &= (u_1 F'_1 - F_1)(uF' - F) - F'F'_1;\\
x' &= \int FF'' du + \int F_1 F''_1 du_1,\\
y' &= i\int F_1 F''_1 du_1 - i\int FF'' du,\\
z' &= (u_1 F'_1 - F_1)(uF' - F) + F'F'_1.
\end{aligned}
$$

La formule

$$\xi = 2FF_1$$

donne la solution générale de l'équation aux dérivées partielles

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

x, y, z, ρ ayant la signification donnée précédemment. On en conclut une propriété caractéristique des surfaces trouvées.

Les surfaces de coordonnées x, y, z sont les développées moyennes des surfaces enveloppes de sphères passant par un point fixe dont le centre décrit cette développée.

Les coordonnées de ces surfaces vérifient les relations

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{F'}{2(F - uF')}(x + iy) + \frac{uF' - F}{2F'}(x - iy),\\
z &= \frac{F'_1}{2(F_1 - u_1 F'_1)}(x - iy) + \frac{u_1 F'_1 - F_1}{2F'_1}(x + iy).
\end{aligned}
$$

Ces formules montrent que les lignes de paramètres u, u_1 sont des courbes planes dont les plans passent par l'origine.

Les coordonnées des deux surfaces d'un couple sont liées par la relation

$$z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Des formules qui donnent x', y', combinées avec l'équation qu'on obtient en égalant les deux valeurs de z données précédemment on déduit que les coordonnées x, y; x', y' sont liées par une relation de la forme

$$\frac{y}{x} = \varphi(x', y').$$

Des deux relations que nous venons d'établir entre les deux surfaces du couple, on peut déduire la conclusion suivante :

Soit donné, sur la première surface, un réseau déterminé par les intersections de deux familles de plans, les premiers étant parallèles au plan des xy, les seconds passant par l'axe des z; si l'on fait correspondre sur les deux surfaces les lignes de même longueur, à ce réseau de la première correspondra sur la seconde un réseau déterminé par les intersections d'une famille de sphères concentriques, et d'une famille de cylindres de génératrices rectilignes parallèles à l'axe des z.

Prenons par exemple

$$F = \sqrt{a}\, u^m,$$
$$F_1 = \sqrt{a}\, u_1^{m_1}.$$

Il vient

$$x + iy = 2am_1(m-1)u^m u_1^{m_1-1},$$
$$x - iy = 2am(m_1-1)u^{m-1}u_1^{m_1},$$
$$z = au^{m-1}u_1^{m_1-1}[(m-1)(m_1-1)uu_1 - mm_1];$$

$$x' + iy' = 2a\frac{m(m-1)}{2m-1}u^{2m-1},$$
$$x' - iy' = 2a\frac{m_1(m_1-1)}{2m_1-1}u_1^{2m_1-1},$$
$$z' = au^{m-1}u_1^{m_1-1}[(m-1)(m_1-1)uu_1 + mm_1].$$

Dans le cas particulier où les constantes m, m_1 satisfont à la condition

$$2mm_1 - m - m_1 + 1 = 0,$$

les coordonnées des deux surfaces satisfont aux relations

$$z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

D'où l'on tire

$$x^2 + y^2 + x'^2 + z'^2 = 0.$$

Pour $m = m_1$ on a des surfaces de révolution.

Parmi les couples de surfaces applicables que définissent les équations (11), il en est qui se composent de surfaces identiques. Le calcul montre que ces surfaces sont celles pour lesquelles on a une des deux relations

$$\rho + z = 0, \qquad \rho - z = 0.$$

Nous connaissons la signification géométrique de ces surfaces. Elles sont définies en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

V.

Interprétation de l'équation $rt =$ const. — Nous allons maintenant considérer l'équation (12) dans le cas où l'on a

$$U' U'_1 = - K^2 = \text{const.},$$

et écrivant cette relation avec la notation des coordonnées cartésiennes nous aurons

$$rt + K^2 = 0. \tag{13}$$

Décrivant le premier membre par rapport à y, il vient

$$t \frac{\partial r}{\partial y} + r \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

D'où, en tenant compte de l'équation proposée

$$K^2 \frac{\partial t}{\partial y} - t^2 \frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - K^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0, \tag{14}$$

et sous cette forme on reconnaît une équation de Monge et d'Ampère.

En appliquant la méthode des caractéristiques, on trouvera une combinaison intégrable pour chaque système. D'où l'on déduit les deux relations

$$\frac{\partial q}{\partial y} = K e^{\frac{\frac{\partial q}{\partial x}}{K}}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = K e^{\frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{K}}.$$

Si nous considérons maintenant q, x, y comme les coordonnées d'une surface, les relations précédentes nous montrent que nous obtiendrons des surfaces développables. L'intégration des équations trouvées se fera donc en écrivant les formules qui définissent de pareilles surfaces.

Bornons-nous à la première équation. Il vient

$$q = ax + \mathrm{K}e^{\frac{a}{\mathrm{K}}}y + \alpha,$$

$$0 = a'\left(x + e^{\frac{a}{\mathrm{K}}}y\right) + 1.$$

La détermination de z s'achèvera par une quadrature.

Si nous procédons par rapport à x comme nous avons procédé par rapport à y, nous obtiendrons deux relations de l'équation proposée renfermant chacune une fonction arbitraire.

Revenant aux notations primitives nous voyons que ξ sera défini par le système

$$\frac{\partial\xi}{\partial u_1} = au + \mathrm{K}e^{\frac{a}{\mathrm{K}}}u_1 + \alpha,$$

$$0 = a'\left(u + e^{\frac{a}{\mathrm{K}}}u_1\right) + 1.$$

L'équation (13) se prête à quelques transformations intéressantes que nous allons brièvement exposer.

Pour plus d'ordre dans les calculs, posons

$$q = z_1, \qquad x = x_1, \qquad y = y_1.$$

L'équation (14) devient

$$q_1^2 r_1 - \mathrm{K}^2 t_1 = 0,$$

équation de Monge et d'Ampère dont nous venons de déterminer deux solutions particulières.

Appliquons à cette équation la transformation de Legendre.

Nous remarquerons toutefois qu'il faudra exclure de cette transformation les solutions trouvées précédemment comme vérifiant la relation

$$s_1^2 - r_1 t_1 = 0.$$

On a ici

$$z_1 = z_2 - p_2 x_2 - q_2 y_2,$$

$$x_1 = p_2,$$

$$y_1 = q_2,$$

et l'on trouve

$$\mathrm{K}^2 r_2 - y_2^2 t_2 = 0,$$

nouvelle équation de Monge et d'Ampère qui offre elle aussi une combinaison intégrable dans chaque système, combinaisons qui nous ramènent aux solutions précédentes.

Posons maintenant

$$x_3 = x_2 + \mathrm{K} \log \frac{y_2}{\mathrm{C}},$$

$$y_3 = x_2 - \mathrm{K} \log \frac{y_2}{\mathrm{C}},$$

C désignant une constante arbitraire.

On obtient l'équation de Laplace

$$4\mathrm{K} s_3 + p_3 - q_3 = 0.$$

Posons enfin

$$x_3 = x_4, \qquad y_3 = y_4, \qquad z_3 = z_4 e^{\frac{x_4 - y_4}{4\mathrm{K}}}$$

et l'on obtient l'équation de Laplace à invariants égaux

$$16\mathrm{K}^2 s_4 + z_4 = 0.$$

Nous avons pris pour point de départ des résultats exposés en dernier lieu la forme quadratique définie par la relation (9). Toutefois, remarquons-le en terminant, le rôle principal de cette formule n'est pas dans la détermination de surfaces applicables. Elle intervient plus naturellement dans la recherche d'un problème plus général qu'on peut formuler comme il suit :

Déterminer deux surfaces variables S, S_1 *telles que les dimensions des projections orthogonales sur* S_1 *des figures infinitésimales tracées sur* S *soient indépendantes de la variation des surfaces.*

Si l'on impose aux deux surfaces la condition de devenir identiques, on retrouve le problème des surfaces applicables.

Le problème étant ainsi posé, on voit tout de suite que la formule (9) en donne des solutions.

Si, d'abord, nous nous donnons une surface quelconque S_1 définie par la fonction ξ, les projections sur cette surface fixe des figures infinitésimales, tracées sur une surface S de coordonnées θ_1, θ_2, θ_3 variant par conséquent avec les constantes a_α, b_α, c_α, d_α seront indépendantes de la variation de cette surface. Nous obtenons ainsi une première solution du problème.

Nous pouvons encore nous donner une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = F(u, u_1),$$

F désignant une fonction arbitrairement choisie. A la solution générale de cette équation correspondent deux surfaces S, S_1 variant toutes les deux avec les deux fonctions arbitraires que renferme cette solution. Or, encore ici, les projections considérées, dépendant uniquement de la nature de la fonction F, sont indépendantes de la variation des fonctions arbitraires qui entrent dans la solution, et par suite de la nature des surfaces S, S_1.