BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Détermination explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 77-104

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__77_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

DÉTERMINATION EXPLICITE DES SURFACES QUI PRÉSENTENT UN RÉSEAU DOUBLEMENT CYLINDRÉ;

Par M. L. Raffy.

Pour poser le problème que je vais résoudre ici, je citerai le début d'une Note que j'ai publiée il y a quatre ans ([1]) :

« Si une surface présente un réseau conjugué (u, v) tel que les plans osculateurs, menés aux courbes $v = \text{const.}$ en tous les points de chaque ligne $u = \text{const.}$, soient parallèles à une direction fixe (U_1, U_2, U_3), je dirai que la famille $u = \text{const.}$ est *cylindrée*. (On sait que toute famille de lignes de courbure *planes* est cylindrée.) Si la même propriété appartient aux deux familles du réseau, on dira que la surface est *doublement cylindrée* : telles sont, par exemple, les surfaces de translation et d'autres dépendant d'un plus grand nombre de fonctions arbitraires. Je reviendrai sans doute sur la théorie générale de ces surfaces, qui me paraît mériter d'être développée. »

Quelques semaines après l'apparition de cette Note, M. Guichard ([2]), qui avait retrouvé, sous le nom de *loi de parallélisme des réseaux*, une remarquable transformation, due au géomètre russe K. Peterson ([3]), donnait l'intéressante indication que voici :

« Parmi les réseaux parallèles à un réseau doublement cylindré, il y en a un dont les deux tangentes rencontrent chacune une courbe fixe. Cette propriété permet de construire tous ces réseaux. On peut diriger les calculs de façon à n'introduire que des quadratures dans les résultats. »

([1]) *Surfaces doublement cylindrées et surfaces isothermiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVIII, 1899, p. 285).

([2]) *Sur quelques applications de la loi de parallélisme des réseaux et des congruences* (*Ibid.*, p. 723).

([3]) *Recueil mathématique de Moscou*, 1866. — *Voir* aussi une Note de M. Stäckel *Sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXIII, 1896, p. 677) et un Mémoire du même auteur inséré dans les *Mathematische Annalen* (t. XLIX).

Ces lignes m'avaient décidé à ne pas revenir sur le problème général des surfaces doublement cylindrées. Mais mon attention ayant été rappelée récemment sur la transformation de Peterson, je reconnus que le théorème de M. Guichard ne fournit pas les réseaux doublement cylindrés dont une famille est composée de courbes de contact de cylindres circonscrits (*réseaux singuliers*). Cela tient à ce que les réseaux *singuliers* se correspondent à eux-mêmes, comme il sera prouvé plus loin (n° 16), dans la transformation considérée. J'ai ainsi été conduit à reprendre le problème par la méthode indiquée dans ma Note, et j'ai obtenu la détermination entièrement explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré, par des formules où ne figure *aucun signe de quadrature*.

J'ai comparé mes résultats relatifs aux réseaux *non singuliers* avec ceux que fournit la méthode de M. Guichard; cette méthode conduit effectivement à des quadratures portant sur des fonctions arbitraires; mais, si l'on fait disparaître les signes de quadrature, on retrouve exactement les formules obtenues au paragraphe III du présent travail.

En vue d'applications éventuelles, je détermine, dans un dernier paragraphe, toutes les surfaces qui présentent un réseau *doublement cylindré à invariants égaux.*

I. — Familles cylindrées et réseaux doublement cylindrés.

1. On sait que, quand les courbes $u=$ const. et $v=$ const. forment un réseau conjugué sur une surface (S), les coordonnées ponctuelles x, y, z de cette surface satisfont à une équation de Laplace

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = B\frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Cela posé, nous énoncerons quelques lemmes qui caractérisent comme familles *cylindrées* certaines familles de courbes, communes à toutes les surfaces.

Lemme I. — *Le réseau* (u, v) *étant conjugué, pour que les lignes* $u=$ const. *soient des courbes de contact de cylindres* *circonscrits, il faut et il suffit que l'on ait identiquement*

$$B_1 = 0. \tag{1}$$

Lemme II. — *Le réseau* (u, v) *étant conjugué, si les lignes* $u =$ const. *sont des courbes de contact de cylindres circonscrits, les plans osculateurs menés aux courbes* $v =$ const. *en tous les points de chaque ligne* $u =$ const. *sont parallèles à un plan fixe, et réciproquement.*

Lemme III. — *Le réseau* (u, v) *étant conjugué, pour que les lignes* $u =$ const. *soient des courbes de contact de cônes circonscrits, il faut et il suffit que l'on ait identiquement*

$$BB_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

Lemme IV. — *Le réseau* (u, v) *étant conjugué, si les lignes* $u =$ const. *sont des courbes de contact de cônes circonscrits, les plans osculateurs menés aux courbes* $v =$ const. *en tous les points de chaque ligne* $u =$ const. *passent par une droite fixe, qui est la tangente au lieu du sommet des cônes, et réciproquement.*

Il suit évidemment de ces lemmes que *toute famille de courbes d'ombre, faisant partie d'un réseau conjugué, est une famille cylindrée.*

2. Voici maintenant, d'après ma Note précitée, le caractère analytique général d'une famille cylindrée.

Lemme V. — *Le réseau* (u, v) *étant conjugué, pour que les lignes* $u =$ const., *supposées n'être pas des courbes de contact de cylindres circonscrits, forment une famille cylindrée, il faut et il suffit que l'on ait identiquement*

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) + B_1\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) = 0. \tag{3}$$

En effet, nous avons à exprimer que le plan osculateur à la courbe de paramètre v, mené au point (x, y, z) où cette courbe rencontre une ligne de la famille $u =$ const., est parallèle, quel que soit v, à une droite dont les coefficients directeurs $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ ne dépendent que de u. Or l'équation de ce plan osculateur est

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x''_{u^2} & y''_{u^2} & z''_{u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

On a donc la condition de parallélisme

$$\begin{vmatrix} a(u) & b(u) & c(u) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x''_{u^2} & y''_{u^2} & z''_{u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

En conséquence, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions ρ et μ telles qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial v}(\rho\theta'_u + \mu\theta''_{u^2}) = 0 \qquad (\theta = x, y, z),$$

ce qui peut s'écrire

$$\mu\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \rho\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0.$$

Si l'on remplace θ''_{uv} par sa valeur tirée de l'équation fondamentale (E) et qu'on ordonne suivant les dérivées de θ, il vient

$$\left(\mu B + \frac{\partial\mu}{\partial v}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \left(\mu BB_1 + \mu\frac{\partial B}{\partial u} + \rho B + \frac{\partial\rho}{\partial v}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}$$
$$+ \left(\rho B_1 + \mu B_1^2 + \mu\frac{\partial B_1}{\partial u}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

Cette condition étant vérifiée par les trois coordonnées x, y, z, on reconnaît aisément qu'elle doit se réduire à une identité. On aura donc

(4) $$\frac{\partial\mu}{\partial v} + \mu B = 0,$$

(5) $$\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho B + \mu BB_1 + \mu\frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

(6) $$\rho B_1 + \mu B_1^2 + \mu\frac{\partial B_1}{\partial u} = 0.$$

Or nous supposons que les lignes $u =$ const. ne sont pas des courbes de contact de cylindres circonscrits, c'est-à-dire (lemme I) que la fonction B_1 ne se réduit pas à zéro. Il suit de là que μ ne peut pas être pris égal à zéro, parce que ρ devrait alors être nul aussi et que la double supposition $\rho = \mu = 0$ est inacceptable. La solution $\mu = 0$ étant écartée, l'équation (4) donne

$$\mu = e^{-\int B\,dv}.$$

On tire de l'équation (6)

$$\rho = -\mu\left(B_1 + \frac{\partial \log B_1}{\partial u}\right).$$

Substituant ces expressions de ρ et de μ dans l'équation (5) et négligeant le facteur commun μ, on trouve

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) + B_1\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) = 0,$$

ce qui est la condition annoncée. Elle est évidemment nécessaire et suffisante, d'après la façon même dont elle a été obtenue ([1]).

Il est à peine besoin de faire observer que cette condition (3) est vérifiée si l'on a, en particulier,

$$(2)\qquad BB_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire si les lignes $u =$ const. sont des courbes de contact de cônes circonscrits (lemme III), ce qui s'accorde bien avec le lemme IV.

3. Nous pouvons maintenant aborder la détermination des surfaces admettant un réseau (u, v) doublement cylindré. L'analyse précédente impliquant essentiellement la condition $B_1 \neq 0$, les réseaux dont fait partie une famille $u =$ const. de courbes de contact de cylindres circonscrits et qui sont caractérisés (lemme I) par l'hypothèse $B_1 = 0$, ne rentrent pas, bien que cette famille soit cylindrée (lemme II), dans la classe générale des réseaux dont

---

([1]) Elle exprime (en vertu du lemme I) que les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à la surface (S) suivant les lignes $u =$ const. sont, sur la surface (Σ) qu'elles engendrent, des courbes de contact de cylindres circonscrits.

une famille est cylindrée. Si la seconde famille $v = \text{const.}$ d'un pareil réseau ($B_1 = 0$) est cylindrée, ce réseau sera doublement cylindré, sans pouvoir être donné par les formules générales des réseaux doublement cylindrés que nous établirons ci-après ; c'est donc un réseau doublement cylindré *singulier*, qu'il faut rechercher à part.

II. — Réseaux doublement cylindrés singuliers.

4. Proposons-nous de déterminer toutes les surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré dont une famille $u = \text{const.}$ est formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits. A la condition

$$B_1 = 0 \tag{1}$$

il faut associer celle qui exprime que la famille $v = \text{const.}$ est cylindrée. En vertu du lemme V, nous obtiendrons cette relation en échangeant u et v, ainsi que B et B_1 dans la relation (3), ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) + B\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) = 0. \tag{3'}$$

Mais il ne faut pas perdre de vue l'hypothèse $B = 0$, exclue par le lemme V et en vertu de laquelle (lemme II) la famille $v = \text{const.}$ est cylindrée. Il faut donc, avant tout, mentionner ce cas extrême $B = B_1 = 0$.

5. *Cas extrême* $B = B_1 = 0$. — Cette double hypothèse, réduisant l'équation fondamentale à $\theta''_{uv} = 0$, ne correspond qu'aux surfaces dites *surfaces de translation*

$$x = U_1 + V_1, \qquad y = U_2 + V_2, \qquad z = U_3 + V_3, \tag{I}$$

qui, toutes, sont doublement cylindrées (n° 1).

6. *Cas intermédiaire*. — Supposant désormais $B \neq 0$, nous pouvons faire usage de la condition (3'), que l'hypothèse $B_1 = 0$ réduit à

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \log B}{\partial v} + B\right) = 0.$$

On conclut de là

$$\frac{\partial \log B}{\partial v} + B = \frac{V''}{V'},$$

en désignant par V une fonction de v seulement, par V' et V'' ses deux premières dérivées. Le résultat précédent s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V'}{B}\right) = V'.$$

Intégrant et désignant par U une fonction de u seulement, nous trouvons

$$(7) \qquad B = \frac{V'}{U + V}.$$

Supposons que la fonction U se réduise à une constante : on peut alors prendre $U = 0$. L'équation fondamentale (E) devient

$$\frac{\theta''_{uv}}{\theta'_u} = B = \frac{V'}{V}.$$

On a donc, par une première intégration,

$$x'_u = U'_1 V, \qquad y'_u = U'_2 V, \qquad z'_u = U'_3 V;$$

et, par une seconde intégration,

$$(\text{II}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = U_1 V + V_1, \\ y = U_2 V + V_2, \\ z = U_3 V + V_3, \end{array} \right.$$

les U_i désignant trois fonctions arbitraires de u et les V_i trois nouvelles fonctions arbitraires de v. Ces formules, qui ne contiennent en fait que *cinq* fonctions arbitraires (au lieu de sept), représentent *toutes les surfaces qui admettent un réseau conjugué formé par une famille* $u =$ const. *de courbes de contact de cylindres circonscrits et par une famille* $v =$ const. *de courbes de contact de cônes circonscrits*. En effet, B_1 étant nul et B indépendant de u, on a bien

$$BB_1 - \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

ce qui est (lemme III) la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes $v =$ const. soient des courbes de contact de cônes circonscrits.

7. *Cas général.* — Revenons à la relation (7)

$$B = \frac{V'}{U + V},$$

et supposons maintenant la dérivée U' différente de zéro. L'équation fondamentale (E) s'écrit

$$\frac{\theta''_{uv}}{\theta'_v} = \frac{V'}{U + V},$$

et donne, par une intégration immédiate,

$$\theta'_u = (U + V)\,\varphi(u).$$

Il convient de prendre

$$\varphi(u) = \frac{d}{du}\frac{U'_i}{U'} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ce que nous sommes en droit de faire, d'après l'hypothèse actuelle $U' \neq 0$. Nous aurons donc, pour x par exemple,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (U + V)\frac{d}{du}\frac{U'_1}{U'}.$$

Intégrant par parties et désignant par V_1 une fonction arbitraire de v, nous trouvons

$$x = \frac{U'_1}{U'}(U + V) - \int U'_1\,du = \frac{U'_1}{U'}(U + V) - (U_1 + V_1).$$

En conséquence, *les surfaces qui admettent un réseau doublement cylindré formé par une famille* $u =$ const. *de courbes de contact de cylindres circonscrits et par une famille de lignes* $v =$ const. *qui ne sont ni des courbes de contact de cylindres circonscrits, ni des courbes de contact de cônes circonscrits, sont représentées par les formules*

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{U'_1}{U'}(U + V) - (U_1 + V_1), \\ y &= \frac{U'_2}{U'}(U + V) - (U_2 + V_2), \\ z &= \frac{U'_3}{U'}(U + V) - (U_3 + V_3), \end{aligned} \right.$$

où les U sont des fonctions arbitraires de u, les V des fonctions arbitraires de v. Elles dépendent effectivement de *six* fonctions arbitraires.

8. On peut se proposer de distinguer parmi ces surfaces celles sur lesquelles les courbes $u =$ const. sont des courbes de contact de cylindres *parallèles à un plan fixe*. Il est bien connu que, dans ce cas, les courbes $v =$ const. sont situées dans des plans parallèles au plan fixe. Les surfaces correspondantes sont donc la généralisation des surfaces moulures cylindriques de Monge, puisqu'elles présentent un réseau conjugué dont une famille est composée de sections parallèles à un plan, et l'autre de courbes de contact de cylindres circonscrits parallèles à ce plan. Pour les trouver, supposons, par exemple, les sections planes $v =$ const. parallèles au plan $z = 0$. Il suffira d'écrire que, dans les formules (III), l'expression de z est indépendante de u. On trouve ainsi les formules

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{U_1'}{U'}(U + V) - (U_1 + V_1), \\ y = \dfrac{U_2'}{U'}(U + V) - (U_2 + V_2), \\ z = W(v), \end{cases}$$

qui ne contiennent, en fait, que *cinq* fonctions arbitraires et qu'on peut écrire plus simplement en prenant $U = u$, $W = v$. On arrive sans difficulté à un résultat tout à fait équivalent en considérant le cylindre variable

$$y - ux = \varphi(z, u),$$

et en déterminant la fonction φ de telle sorte que, sur la surface enveloppe de ce cylindre, les plans osculateurs aux courbes de contact $u =$ const., menés aux divers points de chaque section plane $z =$ const., soient parallèles à une droite.

9. *Remarque.* — On connaît trois classes de surfaces, *dépendant de fonctions arbitraires,* sur lesquelles un réseau conjugué (u, v) reste conjugué dans une série continue de déformations. Ces réseaux *persistants* sont tous des réseaux doublement cylindrés :

1° Les surfaces de Peterson et Bianchi,

$$z = X(x) + Y(y),$$

sont doublement cylindrées, comme surfaces de translation:

2° Les surfaces de Peterson,

$$x = U_1 V, \qquad y = U_2 V, \qquad z = V_3,$$

rentrent dans notre type (II), c'est-à-dire dans le cas intermédiaire des réseaux singuliers;

3° Les surfaces de MM. Mlodzieiowski et Goursat,

$$x = \frac{U_1'}{U'}(U + V) - U_1, \qquad y = \frac{U_2'}{U'}(U + V) - U_2, \qquad z = W(v),$$

rentrent dans notre type (III), c'est-à-dire dans le cas général des réseaux singuliers.

III. — Réseaux doublement cylindrés non singuliers.

10. D'après le lemme V, pour obtenir toutes les surfaces présentant un réseau doublement cylindré *non singulier*, c'est-à-dire dont aucune des deux familles n'est formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits, il faut intégrer l'équation fondamentale

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = B\frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

dont les coefficients B et B_1 satisfont au système

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) + B_1\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\text{(3')} \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) + B\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) = 0.$$

Il est naturel de former les invariants h et k de l'équation (E). On trouve ainsi :

$$h = B\left(B_1 - \frac{\partial B}{B\,\partial u}\right), \qquad k = B_1\left(B_2 - \frac{\partial B_1}{B_1\,\partial v}\right).$$

et il est visible que le système (3), (3') est vérifié quand on suppose à la fois

$$h = 0, \qquad k = 0;$$

on sait qu'alors l'intégration de l'équation (E) est immédiate.

Supposons maintenant $h \neq 0$. Je dis que *l'équation* (E_1) *fournie par l'application de la méthode de Laplace a son invariant h_1 égal à zéro.* On a, en effet,

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \, \partial v},$$

ou, en développant les calculs,

$$h_1 = BB_1 - 2\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \log\left(B_1 - \frac{\partial B}{B \, \partial u}\right).$$

Or, l'équation (3′) donne

$$\frac{\partial}{\partial v} \log\left(B_1 - \frac{\partial B}{B \, \partial u}\right) = -B.$$

Il vient, en conséquence,

$$h_1 = BB_1 - \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \, \partial v};$$

c'est le premier membre de l'équation (3′); donc $h_1 = 0$.

A raison de la symétrie des équations (3) et (3′), on verrait de même que si k est différent de zéro, *l'équation* (E_{-1}) *a son invariant k_{-1} égal à zéro.*

En conséquence, nous distinguerons trois cas : le *cas extrême* $h = 0$, $k = 0$; le *cas intermédiaire* $h \neq 0$, $k = 0$, ce qui entraîne $h_1 = 0$; le *cas général*, $h \neq 0$, $k \neq 0$, ce qui entraîne $h_1 = 0$, $k_{-1} = 0$.

11. *Cas extrême.* — La double hypothèse $h = k = 0$ revient, d'après le lemme III, à supposer que *les deux familles du réseau sont des courbes de contact de cônes circonscrits;* et, d'après le lemme IV, les surfaces qui présentent un pareil réseau sont *doublement cylindrées.* Des considérations géométriques simples montrent que leurs coordonnées ont des expressions de la forme

$$\text{(IV)} \qquad x = \frac{U_1 + V_1}{U + V}, \qquad y = \frac{U_2 + V_2}{U + V}, \qquad z = \frac{U_3 + V_3}{U + V},$$

les U ne dépendant que de u, les V que de v.

On peut aussi intégrer très facilement les équations

$$BB_1 = \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Il suffit de poser

$$B = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}, \qquad B_1 = -\frac{\lambda'_u}{\lambda}.$$

On trouve immédiatement

$$\lambda''_{uv} = 0, \qquad \lambda = U + V, \qquad B = -\frac{V'}{U+V}, \qquad B_1 = -\frac{U'}{U+V},$$

et l'équation (E) devient

$$\frac{\partial^2(\lambda\theta)}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

ce qui donne bien pour x, y et z les valeurs écrites plus haut.

12. *Cas intermédiaire.* — La condition $k = 0$ exprime (lemme III) que *les lignes* $u =$ const. *sont des courbes de contact de cônes circonscrits;* mais, h étant différent de zéro, les lignes $v =$ const. ne sont pas des courbes d'ombre.

Pour intégrer les équations (3) et (3'), remarquons que, combinées par voie d'addition, elles donnent toujours

$$\frac{\partial^2 \log BB_1}{\partial u\,\partial v} = 2BB_1.$$

C'est là une équation de Liouville, dont l'intégrale bien connue est

$$BB_1 = \frac{U'V'}{(U+V)^2},$$

U désignant une fonction de u seulement, dont la dérivée est U', et V une fonction de v seulement, dont la dérivée est V'.

De cette relation, qui est valable dans tous les cas, rapprochons la condition $k = 0$, qui donne

$$BB_1 = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Il viendra

$$\frac{\partial B_1}{\partial v} = \frac{U'V'}{(U+V)^2};$$

d'où résulte, par une intégration immédiate,

$$B_1 = -\frac{U'}{U+V} + f(u).$$

Pour plus de ressemblance avec ce que nous trouverons dans le cas général, nous écrirons

$$(9) \qquad B_1 = -\frac{U'}{U+V} + \frac{U'_0}{U_0} = \frac{U'_0(U+V) - U'U_0}{U_0(U+V)}.$$

Or B est ici la dérivée logarithmique de B_1 par rapport à v; nous aurons donc

$$(10) \qquad B = -\frac{V'}{U+V} + \frac{V'U'_0}{U'_0(U+V) - U'U_0}.$$

Si l'on porte ces valeurs de B_1 et B dans l'équation (E), l'invariant k sera nul, ainsi que l'invariant h_1 de l'équation (E_1). Or on sait que l'hypothèse $k = 0$ réduit l'équation (E) à la forme

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - B_1\theta\right) - B\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - B_1\theta\right) = 0.$$

Nous aurons donc une intégrale particulière θ en posant

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} - B_1\theta = 0,$$

d'où l'on tire, avec une nouvelle fonction arbitraire V_1 dépendant seulement de v,

$$(11) \qquad \theta = V_1 e^{\int B_1\,du} = \frac{V_1 U_0}{U+V}.$$

D'autre part, si nous effectuons la transformation de Laplace

$$(12) \qquad \theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial v} - B\theta,$$

nous serons conduits à l'équation (E_1), qui, ayant son invariant h_1 égal à zéro, peut s'écrire

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - \theta_1\frac{\partial\log B}{\partial v}\right) - B_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - \theta_1\frac{\partial\log B}{\partial v}\right) = 0,$$

et l'on sait que θ est lié à θ_1 par la relation

$$(14) \qquad h\theta = \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - B_1\theta_1.$$

Nous aurons donc une intégrale particulière pour θ_1, et conséquemment pour θ, en posant

$$(13') \qquad \frac{\partial \log \theta_1}{\partial v} = \frac{\partial \log B}{\partial v},$$

ce qui donne d'abord $\theta_1 = BU_1$, puis

$$(15) \qquad \theta = \frac{B}{h}U'_1 - U_1,$$

U_1 désignant une fonction arbitraire de u seulement et U'_1 la dérivée de U_1.

D'après la théorie des équations de Laplace, nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation (E) en ajoutant les deux solutions (11) et (15), ce qui donne

$$\theta = \frac{B}{h}U'_1 - U_1 + \frac{U_0V_1}{U+V}.$$

Il n'y a plus qu'à calculer le coefficient de U'_1, dont l'expression générale est

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{B_1 - \dfrac{\partial \log B}{\partial u}}.$$

Or, si l'on substitue dans ce rapport les expressions (9) et (10) des coefficients B_1 et B, on trouve aisément

$$(10) \qquad \frac{B}{h} = \frac{\dfrac{U'_0}{U'}(U+V) - U_0}{\left(\dfrac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)},$$

et l'on est assuré que le rapport $U'_0 : U'$ ne se réduit pas à une constante, sans quoi h serait nul, contrairement à notre hypothèse actuelle.

Pour passer de l'une des coordonnées aux deux autres, on doit conserver les fonctions U, U_0 et V et remplacer par de nouvelles fonctions arbitraires les fonctions U_1 et V_1 qu'a introduites l'intégration. On trouve ainsi :

$$(V)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\frac{U_0'}{U'}(U+V)-U_0}{\left(\frac{U_0'}{U'}\right)'(U+V)}U_1' - U_1 + \frac{U_0V_1}{U+V}, \\ y &= \frac{\frac{U_0'}{U'}(U+V)-U_0}{\left(\frac{U_0'}{U'}\right)'(U+V)}U_2' - U_2 + \frac{U_0V_2}{U+V}, \\ z &= \frac{\frac{U_0'}{U'}(U+V)-U_0}{\left(\frac{U_0'}{U'}\right)'(U+V)}U_3' - U_3 + \frac{U_0V_3}{U+V}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées des surfaces qui présentent *un réseau doublement cylindré dont une famille* ($u =$ const.) *est formée par des courbes de contact de cônes circonscrits,* les lignes $v =$ const. n'étant point des courbes de contact soit de cônes, soit de cylindres circonscrits.

13. De même que nous avons obtenu précédemment (n° 8) une généralisation des surfaces moulures, on peut ici généraliser la double propriété des surfaces de Joachimsthal en distinguant parmi les surfaces (V) celles pour lesquelles les cônes circonscrits suivant les lignes $u =$ const. *ont leurs sommets en ligne droite.* On sait, d'après un théorème dû à M. Kœnigs, que les lignes $v =$ const. sont les sections faites dans la surface par les plans qui contiennent cette droite. Prenons cette droite pour axe des z, et exprimons que les tangentes aux courbes $v =$ const., menées aux divers points de chaque ligne $u =$ const., vont passer par un point (o, o, U_4) de Oz ; nous trouvons

$$\frac{x'_u}{x} = \frac{y'_u}{y} = \frac{z'_u}{z - U_4}.$$

On reconnaît immédiatement que la valeur commune de ces rapports est égale à B_1. On a donc

$$\frac{\partial \log x}{\partial u} = \frac{\partial \log y}{\partial u} = B_1 = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{U_0}{U+V},$$

d'où l'on déduit

$$(16) \qquad x = \frac{U_0 V_1}{U+V}, \qquad y = \frac{U_0 V_2}{U+V}.$$

Rapprochant de ces équations la dernière des formules (V), on a les coordonnées de toutes les surfaces qui présentent un *réseau azimutal doublement cylindré.*

Il serait d'ailleurs facile de résoudre le problème directement, à l'aide des formules

$$y = vx, \qquad z = u + x\varphi(u, v), \qquad x\varphi'_u + 1 = 0,$$

qui représentent une surface quelconque, rapportée à ses sections azimutales $v =$ const. et aux courbes de contact $u =$ const. des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur l'axe Oz. La famille $u =$ const. est cylindrée, puisque les plans des courbes $v =$ const. passent par l'axe Oz. En exprimant que la famille plane est également cylindrée, on obtient une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, d'où l'on peut tirer l'expression entièrement explicite de la fonction φ.

14. *Cas général.* — Les deux invariants h et k sont différents de zéro. Il suit de là (n° 10) que l'équation (E_1) a son invariant h_1 égal à zéro et que l'invariant k_{-1} de l'équation (E_{-1}) est nul également.

Nous sommes donc en droit de reprendre toutes les déductions du n° **12** relatives à l'équation (E_1), de sorte que l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = B\frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

admet la solution particulière déjà trouvée dans le cas intermédiaire

$$(15) \qquad \theta = \frac{B}{h} U'_1 - U_1.$$

Les mêmes considérations s'appliquant à l'équation (E_{-1}); nous aurons aussi une autre solution particulière

$$(17) \qquad \theta = \frac{B_1}{k} V'_1 - V_1,$$

si V_1 est une fonction arbitraire de v et V'_1 sa dérivée. On sait que l'intégrale générale de l'équation (E) est la somme de ces deux solutions particulières :

$$(18)\qquad \theta = \frac{B}{h}U'_1 - U_1 + \frac{B_1}{k}V'_1 - V_1.$$

Tout revient donc à *déterminer les expressions les plus générales des fonctions* B *et* B_1 *qui satisfont aux équations*

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) + B_1\left(B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v}\right) = 0,$$

$$(3')\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) + B\left(B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u}\right) = 0.$$

A cet effet nous poserons

$$(19)\qquad B = \frac{\sigma''_{uv}}{2\sigma'_u},\qquad B_1 = \frac{\sigma''_{uv}}{2\sigma'_v}.$$

Les deux équations proposées se réduisent à la suivante

$$(20)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{\sigma''^2_{uv}}{\sigma'_u\sigma'_v} = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma''^2_{uv}}{\sigma'_u\sigma'_v}.$$

C'est une équation de Liouville, dont l'intégrale est

$$(21)\qquad \frac{\sigma''^2_{uv}}{\sigma'_u\sigma'_v} = \frac{4U'V'}{(U+V)^2},$$

ce qui s'accorde bien avec la relation générale

$$BB_1 = \frac{U'V'}{(U+V)^2},$$

remarquée à propos du cas intermédiaire (n° **12**).

L'équation (21) est l'une de celles qu'a intégrées M. Goursat (*Bull. Soc. math.*, t. XXV, p. 44). On a pour les dérivées de σ les expressions suivantes

$$(22)\qquad \sigma'_u = \frac{(U+V)^2}{U'}\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{U_0+V_0}{U+V}\right)^2,\qquad \sigma'_v = \frac{(U+V)^2}{V'}\left(\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{U_0+V_0}{U+V}\right)^2,$$

U_0 et V_0 étant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v.

Dès lors les formules (19) donnent par différentiation

$$(23)\quad \begin{cases} B = \dfrac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\sigma'_u} = -\dfrac{U'}{U+V}\,\dfrac{V'(U_0+V_0)-V'_0(U+V)}{U'(U_0+V_0)-U'_0(U+V)}, \\[2ex] B_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\sigma'_v} = -\dfrac{V'}{U+V}\,\dfrac{U'(U_0+V_0)-U'_0(U+V)}{V'(U_0+V_0)-V'_0(U+V)}. \end{cases}$$

Remarquons en passant que, si l'on introduit la double hypothèse

$$U_0 = \text{const.},\qquad V_0 = \text{const.}$$

dans ces formules, on retrouve les expressions de B et B_1 relatives au cas extrême (n° 11). Si l'on suppose que la seule fonction V_0 se réduise à une constante, on retrouve les expressions (9) et (10) de B_1 et de B relatives au cas intermédiaire (n° 12).

Il ne nous reste plus, pour avoir effectivement les coordonnées x, y, z comprises dans le type (18), qu'à calculer les deux rapports $B:h$ et $B_1:k$, au moyen des formules (23) ou, mieux, au moyen des formules (19), (21) et (22).

D'après les expressions générales (n° 10) des invariants h et k, nous avons

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{B_1 - \dfrac{\partial \log B}{\partial u}},\qquad \frac{B_1}{k} = \frac{1}{B - \dfrac{\partial \log B_1}{\partial v}}.$$

Il vient donc, eu égard aux formules (19),

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{\dfrac{\partial}{\partial u}\log\dfrac{\sqrt{\sigma'_v}}{B}}.$$

Mais on a, en vertu de ces mêmes formules et de l'équation (21),

$$\frac{B}{\sqrt{\sigma'_v}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma'_u}}\,\frac{\sigma''_{uv}}{2\sqrt{\sigma'_u\sigma'_v}} = \frac{\sqrt{U'V'}}{(U+V)\sqrt{\sigma'_u}}.$$

Remplaçons $\sqrt{\sigma'_u}$ par son expression (22); nous trouverons

$$\frac{\sqrt{\sigma'_v}}{B} = \frac{(U+V)^2}{U'\sqrt{V'}}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{U_0+V_0}{U+V},$$

ou, en effectuant la différentiation,

$$\frac{\sqrt{\sigma'_v}}{B} = \frac{1}{\sqrt{V'}}\left[\frac{U'_0}{U'}(U+V)-(U_0+V_0)\right].$$

De là résulte immédiatement

$$\frac{B}{h} = \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)}, \tag{24}$$

formule qui se réduit à la formule analogue (10′) quand on suppose $V_0 =$ const. A raison de la symétrie des calculs, nous pouvons écrire immédiatement

$$\frac{B_1}{k} = \frac{\frac{V'_0}{V'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'}\right)'(U+V)}. \tag{25}$$

Portons ces expressions (24) et (25) dans l'expression générale (18) des coordonnées x, y, z, et désignons par U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, les fonctions arbitraires qui correspondent aux trois coordonnées. Nous trouverons

$$\text{(VI)}\quad \left\{\begin{aligned}
x &= \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)}\,U'_1 + \frac{\frac{V'_0}{V'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'}\right)'(U+V)}\,V'_1-(U_1+V_1),\\
y &= \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)}\,U'_2 + \frac{\frac{V'_0}{V'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'}\right)'(U+V)}\,V'_2-(U_2+V_2),\\
z &= \frac{\frac{U'_0}{U'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{U'_0}{U'}\right)'(U+V)}\,U'_3 + \frac{\frac{V'_0}{V'}(U+V)-(U_0+V_0)}{\left(\frac{V'_0}{V'}\right)'(U+V)}\,V'_3-(U_3+V_3).
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées des surfaces qui présentent *un réseau doublement cylindré, aucune des deux familles de ce réseau ne se composant de courbes de contact, soit de cylindres, soit de cônes circonscrits.* Elles dépendent en fait de *huit* (et non dix) fonctions arbitraires.

IV. — Digression sur la transformation de Peterson ou transformation par réseaux parallèles.

15. A une surface (S) dont les coordonnées ponctuelles (x, y, z) sont exprimées en fonctions de deux paramètres (u, v) on veut faire correspondre une surface $(S)'$ de coordonnées x', y', z', de telle manière qu'à tout couple (u, v) correspondent sur les deux surfaces des points M et M′ où les courbes coordonnées aient leurs tangentes respectivement parallèles. C'est en cela que consiste la transformation imaginée par Peterson en 1866. Pour la réaliser, on pose

$$(26) \qquad d\theta' = P\frac{\partial\theta}{\partial u}du + Q\frac{\partial\theta}{\partial v}dv, \qquad (\theta = x, y, z;\ \theta' = x', y', z').$$

La condition d'intégrabilité de cette expression différentielle donne

$$(P - Q)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que le réseau (u, v) doit être conjugué sur la surface (S); si donc on écrit

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = B\frac{\partial\theta}{\partial u} + B_1\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

on voit, en identifiant cette équation avec la précédente, que P et Q doivent satisfaire aux deux conditions

$$(27) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} + B(P - Q) = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} + B_1(Q - P) = 0.$$

Comme, d'autre part, on peut alors passer de (S′) à (S) par la transformation

$$(26)' \qquad d\theta = \frac{1}{P}\frac{\partial\theta'}{\partial u}du + \frac{1}{Q}\frac{\partial\theta'}{\partial v}dv,$$

le réseau (u, v) est conjugué aussi sur la surface (S′); d'où l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = B'\frac{\partial\theta'}{\partial u} + B'_1\frac{\partial\theta'}{\partial v}.$$

Si l'on remplace P et Q par leurs inverses dans les équations (27) en même temps que B et B_1 par B' et B'_1, on trouve immédiatement

$$B' = \frac{Q}{P} B, \qquad B'_1 = \frac{P}{Q} B_1.$$

Il suit de là, entre autres conséquences, qu'à un réseau conjugué dont une famille $u =$ const. est formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits ($B_1 = 0$), la transformation considérée fait correspondre un réseau dans lequel la famille $u =$ const. est également formée par des courbes de contact de cylindres circonscrits ($B'_1 = 0$). C'est cette propriété que nous avons visée dans l'introduction du présent travail.

Le procédé qui semble le plus élégant pour traiter les équations (27) consiste à poser

$$P - Q = 2\zeta, \qquad P + Q = 2\tau.$$

Il vient alors

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = -\frac{\partial \zeta}{\partial v} - 2B\zeta, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial u} + 2B_1\zeta,$$

d'où la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\, \partial v} + B\frac{\partial \zeta}{\partial u} + B_1\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v}\right)\zeta = 0.$$

Telle est l'équation dont dépend le problème dans le cas général. C'est l'*adjointe* de l'équation (E); elle a ses deux invariants *nuls*, quand le réseau (u, v) de la surface (S) est formé de deux familles de courbes d'ombre, et alors seulement, d'où l'importance particulière de ces réseaux.

16. Dans ce qui suit, nous supposerons que sur la surface (S) le réseau (u, v) est un réseau *à invariants égaux*, c'est-à-dire qu'on a identiquement

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}. \tag{28}$$

Pour satisfaire à cette condition, nous poserons

$$B = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}, \qquad B_1 = -\frac{\lambda'_u}{\lambda};$$

d'où résulte pour l'équation (E) la forme bien connue

$$\frac{(\lambda\theta)''_{uv}}{\lambda\theta} = \frac{\lambda''_{uv}}{\lambda};$$

l'équation en ζ deviendra

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - 2\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\,\partial v}\zeta = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)''_{uv}}{\frac{\zeta}{\lambda}} = \frac{\lambda''_{uv}}{\lambda};$$

On vérifie évidemment cette équation en prenant ζ proportionnel à λ^2. D'une manière plus générale, si l'on pose

$$\zeta = \lambda^2\theta,$$

on retrouve pour θ l'équation que vérifient les trois coordonnées (x, y, z) de la surface (S).

Sans nous arrêter aux conséquences que l'on pourrait déduire de cette remarque, revenons à la solution particulière $\zeta = \lambda^2$; elle entraîne $\tau =$ const. (1). Si nous prenons $\tau = 0$, il viendra

$$P = \lambda^2, \qquad Q = -\lambda^2,$$

ce qui montre que, *si l'on connaît une surface (x, y, z) rapportée à un réseau conjugué (u, v) à invariants égaux, pour lequel on ait*

$$B = -\frac{\lambda'_v}{\lambda}, \qquad B_1 = -\frac{\lambda'_u}{\lambda},$$

les formules

$$\theta' = \int \lambda^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\,du - \frac{\partial\theta}{\partial v}\,dv\right) \qquad (\theta = x, y, z)$$

représenteront une surface (x', y', z') sur laquelle le réseau (u, v) sera un réseau conjugué à invariants égaux, et les coefficients de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les trois coordonnées x', y', z' auront respectivement pour valeurs

$$B' = -B, \qquad B'_1 = -B_1.$$

---

(1) Il est aisé de voir que l'on ne peut réduire τ à une constante que si le réseau est à invariants égaux.

La réciproque de cette proposition s'établit facilement; elle nous servira dans le paragraphe qui suit.

On voit que la transformation de Peterson pour les réseaux à invariants égaux conduit à la transformation de Moutard (DARBOUX, *Théorie des surfaces,* t. II, n° 391).

V. — RÉSEAUX DOUBLEMENT CYLINDRÉS A INVARIANTS ÉGAUX.

17. A raison de l'importance spéciale des réseaux conjugués *à invariants égaux,* nous allons déterminer tous ceux de ces réseaux qui sont en même temps des réseaux doublement cylindrés. Nous avons donc à introduire dans nos résultats antérieurs la nouvelle condition

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}, \tag{28}$$

caractéristique des réseaux à invariants égaux.

Parmi les réseaux *singuliers,* ceux qui correspondent au *cas extrême*

$$B_1 = 0, \qquad B = 0,$$

et ceux qui correspondent au *cas intermédiaire*

$$B_1 = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

sont évidemment des réseaux à invariants égaux.

Les réseaux *singuliers* qui correspondent au cas *général*

$$B_1 = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial u} \neq 0,$$

ne sont pas à invariants égaux, puisque ces deux hypothèses sont contradictoires avec la condition (28).

Parmi les réseaux *non singuliers,* ceux qui correspondent au *cas extrême*

$$BB_1 = \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$$

sont évidemment des réseaux à invariants égaux.

En conséquence, *les réseaux conjugués formés par deux* *familles de courbes d'ombre* (courbes de contact de cylindres ou de cônes circonscrits) *sont à invariants égaux.* Les surfaces qui présentent de tels réseaux sont définies par les formules (I), (II) et (IV).

Ceux des réseaux *non singuliers* qui correspondent au *cas intermédiaire*

$$BB_1 = \frac{\partial B}{\partial u} \neq \frac{\partial B_1}{\partial v}$$

ne sont pas à invariants égaux, puisque l'une de ces hypothèses est contradictoire avec la condition (28).

18. Il nous reste donc à chercher, parmi les réseaux *non singuliers* qui correspondent au *cas général,* ceux qui sont à invariants égaux. On pourrait effectuer cette recherche en partant des formules générales (23)

$$\begin{aligned} B &= -\frac{U'}{U+V}\,\frac{V'(U_0+V_0)-V'_0(U+V)}{U'(U_0+V_0)-U'_0(U+V)},\\ B_1 &= -\frac{V'}{U+V}\,\frac{U'(U_0+V_0)-U'_0(U+V)}{V'(U_0+V_0)-V'_0(U+V)}, \end{aligned}$$

dans lesquelles on introduirait la condition

$$(28) \qquad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Mais il est plus simple de reprendre les équations *générales* des réseaux non singuliers, savoir

$$(3) \qquad BB_1 + \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B_1}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

$$(3') \qquad BB_1 - \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log B}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

et de les intégrer à nouveau en tenant compte de l'hypothèse (28). A cet effet, nous poserons

$$(29) \qquad B = \sigma'_v, \qquad B_1 = \sigma'_u,$$

ce qui réduit les équations (3) et (3') aux suivantes

$$(30) \qquad \sigma'_u \sigma'_v = \frac{\partial^2 \log \sigma'_u}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \log \sigma'_v}{\partial u\,\partial v}.$$

L'égalité des deux derniers rapports entraîne

$$\frac{\sigma'_v}{V'} = \frac{\sigma'_u}{U'},$$

les deux dénominateurs, l'un fonction de v, l'autre fonction de u, étant différents de zéro ; sans quoi l'un au moins des coefficients B et B_1 serait nul, et le réseau serait *singulier*. Cette dernière relation montre que σ est une fonction de la somme $U + V$; nous écrirons donc

$$\sigma = \sigma(U + V),$$

d'où résultera

$$B = V'\sigma', \qquad B_1 = U'\sigma';$$

et les équations concordantes (30) nous donneront

$$\sigma'^2 = \left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)'.$$

Pour intégrer cette équation, qui est du second ordre par rapport à la fonction inconnue σ', nous poserons

$$\sigma' = \frac{1}{\omega}.$$

Il vient ainsi

$$\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)' + \frac{1}{\omega^2} = 0.$$

Il suffit de multiplier par $2\omega' : \omega$ pour obtenir l'intégrale première

$$(31) \qquad \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2} = \text{const.} = m^2.$$

Nous avons ici deux cas à distinguer, suivant que m est nul ou différent de zéro.

19. *Première hypothèse : $m = 0$.* L'équation (31) se réduit à

$$\omega' = \mp 1;$$

d'où deux solutions

$$\omega = \mp (U + V).$$

La première donne

$$B = \frac{V'}{\omega} = -\frac{V'}{U + V}, \qquad B_1 = \frac{U'}{\omega} = -\frac{U'}{U + V},$$

et nous retrouvons, comme il fallait s'y attendre, les réseaux formés par *deux familles de courbes de contact de cônes circonscrits*. Les surfaces correspondantes sont représentées par les formules (IV).

La seconde solution donne

$$B = \frac{V'}{\omega} = \frac{V'}{U+V}, \qquad B_1 = \frac{U'}{\omega} = \frac{U'}{U+V}.$$

Les valeurs de B et B_1 sont égales et de signes contraires aux précédentes. D'après ce qui a été vu à la fin du n° 16, les coordonnées θ' des surfaces cherchées pourront être calculées au moyen des coordonnées θ des surfaces précédentes ($\omega' = -1$) par la transformation de Peterson, particularisée de manière à conserver l'égalité des invariants,

$$\theta' = \int \lambda^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} du - \frac{\partial \theta}{\partial v} dv\right).$$

On sait (n° 11) qu'ici λ représente $U + V$ et θ le quotient de $U_i + V_i$ par λ; nous prendrons

$$\theta = \frac{U_4 + V_4}{U + V}.$$

Il vient alors, après un calcul facile,

$$\theta' = (U + V)(U_4 - V_4) - 2\int U'U_4\, du + 2\int V'V_4\, dv.$$

Pour effectuer les intégrations, il suffit de poser

$$U_4 = \frac{U'_1}{2U'}, \qquad V_4 = -\frac{V'_1}{2V'},$$

U_1 et V_1 étant deux nouvelles fonctions arbitraires. On trouve alors, en effaçant les accents des coordonnées θ',

$$\text{(VII)} \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{U+V}{2}\left(\frac{U'_1}{U_1} + \frac{V'_1}{V'}\right) - (U_1 + V_1), \\ y &= \frac{U+V}{2}\left(\frac{U'_2}{U'} + \frac{V'_2}{V'}\right) - (U_2 + V_2), \\ z &= \frac{U+V}{2}\left(\frac{U'_3}{U'} + \frac{V'_3}{V'}\right) - (U_3 + V_3). \end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules qui définissent les surfaces pour lesquelles on a $\omega' = 1$. On les déduit des formules (VI) en faisant dans ces dernières $2V_0 = V^2$, $2U_0 = -U^2$.

20. *Seconde hypothèse* : $m \neq 0$. L'équation (31) s'écrit

$$\omega'^2 - m^2\omega^2 = 1.$$

Son intégrale générale est

$$\omega = \frac{1}{m}\operatorname{Sh} m(U + V + c).$$

Nous avons mis en évidence, dans l'argument du sinus hyperbolique, une constante arbitraire c, que l'on pourrait évidemment faire rentrer dans la somme des deux fonctions arbitraires U et V. Mais, à raison de la remarque qui a été faite (n° 16) sur les réseaux à invariants égaux, il y a intérêt à retrouver les deux solutions où B et B_1 ont des couples de valeurs égales et de signes contraires. On les obtient en faisant d'abord $c = 0$, ce qui donne

$$\omega = \frac{\operatorname{Sh} m(U+V)}{m}, \qquad B = \frac{mV'}{\operatorname{Sh} m(U+V)}, \qquad B_1 = \frac{mU'}{\operatorname{Sh} m(U+V)},$$

puis $c = \frac{i\pi}{m}$, ce qui donne

$$\omega = -\frac{\operatorname{Sh} m(U+V)}{m}, \quad B = -\frac{mV'}{\operatorname{Sh} m(U+V)}, \quad B_1 = -\frac{mU'}{\operatorname{Sh} m(U+V)}.$$

On voit que les deux classes de surfaces qui se correspondent par la transformation

$$\theta' = \int \lambda^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\,du - \frac{\partial\theta}{\partial v}\,dv\right),$$

au lieu d'être distinctes comme elles l'étaient pour $m = 0$, rentrent dans un type unique, indépendant même de la valeur de m; ce qui nous permet de prendre $m = 1$ avec $c = 0$, d'où

$$B = \frac{V'}{\operatorname{Sh}(U+V)}, \qquad B_1 = \frac{U'}{\operatorname{Sh}(U+V)}.$$

Si nous faisons dans ces formules $e^U = U_0$, $e^{-V} = V_0$, elles deviennent

$$B = -\frac{2U_0V'_0}{U_0^2 - V_0^2}, \qquad B_1 = \frac{2V_0U'_0}{U_0^2 - V_0^2}$$

et nous devons intégrer avec ces valeurs de B et B_1 l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = B\frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Mais nous avons vu (n° 14) qu'à cause des relations $h_1 = k_{-1} = 0$ l'intégrale générale de cette équation était

$$\theta = \frac{U'_1}{B_1 - \dfrac{\partial \log B}{\partial u}} - U_1 + \frac{V'_1}{B - \dfrac{\partial \log B_1}{\partial v}} - V_1,$$

U_1 et V_1 désignant de nouvelles fonctions arbitraires. Si l'on calcule les dénominateurs de U'_1 et de V'_1, on trouve

$$B_1 - \frac{\partial \log B}{\partial u} = \frac{U'_0(U_0 + V_0)}{U_0(U_0 - V_0)},$$

$$B - \frac{\partial \log B_1}{\partial v} = -\frac{V'_0(U_0 + V_0)}{V_0(U_0 - V_0)}.$$

Nous avons donc, pour représenter les surfaces cherchées, les équations

$$(\mathrm{VIII}) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0}\left(\dfrac{U_0}{U'_0}U'_1 - \dfrac{V_0}{V'_0}V'_1\right) - (U_1 + V_1), \\[2ex] y = \dfrac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0}\left(\dfrac{U_0}{U'_0}U'_2 - \dfrac{V_0}{V'_0}V'_2\right) - (U_2 + V_2), \\[2ex] z = \dfrac{U_0 - V_0}{U_0 + V_0}\left(\dfrac{U_0}{U'_0}U'_3 - \dfrac{V_0}{V'_0}V'_3\right) - (U_3 + V_3). \end{cases}$$

Ces dernières formules, jointes aux formules (I), (II), (IV) et (VII), font connaître *l'ensemble des surfaces qui admettent un réseau conjugué* (u, v) *doublement cylindré à invariants égaux*. Le problème que nous nous étions proposé est donc entièrement résolu.