J. CLAIRIN

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 14-16
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__14_1>

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES;

Par M. J. Clairin.

J'ai indiqué récemment ([2]) une proposition qui complète sur un point les résultats démontrés par M. Goursat, relativement au nombre des invariants que peut posséder un système de caracté-

---

([2]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXII, p. 149.

ristiques d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. La démonstration que j'ai donnée est calquée sur celles qui ont été indiquées par M. Goursat : j'ai remarqué, depuis, que l'on peut procéder d'une manière un peu différente et fonder, sur les propriétés générales des caractéristiques, une démonstration presque complètement affranchie de calcul qui s'applique également au cas des caractéristiques du deuxième ordre et à celui des caractéristiques d'ordre quelconque.

Plus généralement je vais établir, par cette méthode, le théorème suivant :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes (¹)

$$p_{n,0}+f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{n-1,1}, \ldots, p_{0,n}) = 0,$$

à une racine simple λ *de l'équation*

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}}\lambda^{n-1} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}}\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \frac{\partial f}{\partial p_{0,n}} = 0$$

correspond un système de caractéristiques (C); h *désignant un nombre positif différent de zéro, le système* (C) *possède au plus un invariant d'ordre* $n+h$. *Si le système* (C) *se compose de caractéristiques d'ordre* $n-1$, *la proposition subsiste pour les invariants d'ordre* $n\,(h=0)$.

Un invariant d'ordre $n+h$ du système de caractéristiques (C) est une intégrale des équations

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{h+1}f}{dy^{h+1}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-2,h+2}} + \Delta_{n-1}(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n+h}} + (-1)^n\Delta_1(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0,$$

(¹) Pour les notations, *voir* le dernier Chapitre des *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, de M. Goursat.

en posant, d'une manière générale,

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{n-i} - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}} \lambda^{n-i-1} + \ldots + (-1)^{n-i} \frac{\partial f}{\partial p_{i,n-i}}.$$

Supposons qu'il existe k invariants distincts d'ordre $n+h$: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$. Les dérivées partielles de deux quelconques de ces fonctions par rapport aux dérivées d'ordre $n+h$ de z étant proportionnelles, on peut exprimer $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ à l'aide de x, y, z, des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+h-1$ et de Φ_1.

Considérons une caractéristique quelconque d'ordre $n+h-1$, cette caractéristique est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre $n+h$ dépendant d'une constante arbitraire : choisissons une de ces caractéristiques d'ordre $n+h$, de telle sorte que Φ_1 soit égale à une constante C_1 qui peut être prise arbitrairement, au moins entre certaines limites. D'après la définition des invariants, $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ sont égales à certaines constantes $C_2, \ldots, C_k$ quand on remplace les lettres qui y figurent par les quantités correspondantes à la caractéristique considérée. Mais $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ dépendent seulement de $x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n+h-1}$ et de C_1 ; ce sont donc $k-1$ invariants d'ordre $n+h-1$ du système (C).

Nous avons supposé que (C) possédait k invariants d'ordre $n+h$ et nous avons établi qu'il existait alors $k-1$ invariants d'ordre $n+h-1$; il en résulte que tous les invariants d'ordre $n+h$ s'expriment en fonction de l'un d'entre eux et des invariants d'ordre inférieur, ce que nous voulions démontrer. La démonstration s'applique aux invariants d'ordre n si le système (C) se compose de caractéristiques d'ordre $n-1$; en effet, dans ce cas, une caractéristique d'ordre $n-1$ est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre n.

On pourrait, par une méthode toute semblable, établir une proposition analogue relative aux systèmes non singuliers d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes dans lesquels le nombre des fonctions inconnues est égal au nombre des équations.