

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DE MONTESSUS

La résolution numérique des équations

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 26-33

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__26_0

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS;

Par M. R. DE MONTESSUS.

Hoéné Wronski (1) a fondé la réduction numérique des équations *algébriques* sur les fonctions *aleph*. Ces fonctions sont un cas particulier de fonctions plus générales, permettant de résoudre, comme celles-ci, la question posée.

Qui plus est, ces fonctions générales donnent la solution des équations numériques *transcendantes*, au lieu que les fonctions *aleph* n'y sauraient prétendre.

Je vais brièvement exposer la méthode de résolution des équations numériques, telle qu'elle résulte de travaux récents (2), et comparer les résultats de cette méthode avec ceux que H. Wronski avait énoncés *quatre-vingt-dix ans* plus tôt.

Je suppose que l'équation à étudier ne possède que des racines simples. *Deux cas sont à distinguer.*

I. *Les modules des deux racines les plus proches du point $z = 0$ sont différents l'un de l'autre.*

Soit

$$F(z) = 0$$

l'équation proposée et soit α_1 la racine de moindre module. Si $\Phi(z)$ est une fonction assujettie aux seules conditions : 1° de n'avoir aucun pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_1|$; 2° que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série de puissances entières

$$(1) \quad s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots,$$

on sait que le rapport $\frac{s_p}{s_{p+1}}$ tendra, p croissant indéfiniment, vers la racine α (3).

(1) H. WRONSKI, *Résolution générale des équations de tous les degrés* (*Messianisme*, t. III).

(2) HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 90.

(3) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 38.

Si $F(z)$ est un polynome, on pourra prendre pour $\Phi(z)$ un polynome quelconque. On déterminera alors la série (1) en identifiant les termes de l'identité

$$\Phi(z) = F(z) \times (s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots).$$

On vérifiera *sans peine* que, si

$$F(z) = z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} - \dots + (-1)^m A_m,$$

les coefficients s_m sont déterminés de la manière suivante :

1° Les premiers s_0, s_1, \dots, s_p dépendent du polynome $\Phi(z)$, c'est-à-dire, pour l'objet qui nous préoccupe, sont *arbitraires*; on peut prendre arbitrairement, quel que soit le nombre fini p , les coefficients s_0, s_1, \dots, s_p .

2° Les coefficients s_{p+1}, s_{p+2}, \dots vérifient la loi de récurrence

$$(2) \quad -A_m s_n + A_{m-1} s_{n-1} + \dots + (-1)^m A_1 s_{n-(m-1)} + (-1)^{m+1} s_{n-m} = 0 \quad (n < p).$$

Semblablement, le calcul de la racine de plus grand module, à la supposer seule de ce module, peut se faire comme il suit :

Faisant sur l'équation la transformation $z = \frac{1}{Z}$, on est ramené au cas précédent.

Si

$$\sigma_0 + \sigma_1 Z + \sigma_2 Z^2 + \dots$$

est le développement en série de la fonction

$$\frac{\Phi_1(Z)}{F_1(Z)},$$

où $F_1(Z) = 0$ est la transformée de $F(z) = 0$ par la substitution $z = \frac{1}{Z}$,

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$$

tend vers la racine en question.

Ici les fonctions σ vérifient la loi de récurrence

$$(3) \quad \sigma_n - A_1 \sigma_{n-1} + A_2 \sigma_{n-2} - \dots + (-1)^m A_m \sigma_{n-m} = 0.$$

J. Bernoulli connaissait ce procédé de calcul des racines de

plus petit et plus grand module dans le cas où l'équation est algébrique.

Wronski de même. Ce dernier emploie à cet effet les fonctions *aleph*. Les fonctions *aleph positives* correspondent aux fonctions σ et sont définies par les conditions

$$\text{Aleph de zéro} = \mathfrak{A}_0(0) = \mathfrak{A}_0(x_1, x_2, \dots, x_m)^0 = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^0 = 1,$$

$$\text{Aleph de un} = \mathfrak{A}_0(1) = \mathfrak{A}_0(x_1, x_2, \dots, x_m)^1 = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^1 = x_1 + x_2 + \dots + x_m,$$

$$\text{Aleph de deux} = \mathfrak{A}_0(2) = \mathfrak{A}_0(x_1, x_2, \dots, x_m)^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma x_1 x_2,$$

$$\text{Aleph de trois} = \mathfrak{A}_0(3) = \mathfrak{A}_0(x_1, x_2, \dots, x_m)^3 = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^3 = \Sigma x_i^3 + \Sigma x_i^2 x_2 + \Sigma x_1 x_2 x_3,$$

où le symbole $()_1$ indique que, dans le développement de

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^p,$$

on doit remplacer tous les facteurs p , $\frac{p(p-1)}{1.2}$, $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$, ... par l'unité.

Les fonctions \mathfrak{A} vérifient les relations de récurrence (3) et la limite de $\frac{\mathfrak{A}_0(p+1)}{\mathfrak{A}_0(p)}$, quand p croît indéfiniment, n'est autre que la racine de plus grand module de l'équation, si toutes les autres racines ont des modules moindres.

Le calcul de la racine de moindre module, à supposer que toutes les autres racines soient plus grandes en modules, se fait de même par les fonctions *aleph négatives*, définies comme il suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0(-1) &= \mathfrak{A}_0(-2) = \mathfrak{A}_0(-3) = \dots = \mathfrak{A}_0[-(m-1)] = 0, \\ -A_m \mathfrak{A}_0[-(n+m)] &+ A_{m-1} \mathfrak{A}_0[-(n+m-1)] \\ &- A_{m-2} \mathfrak{A}_0[-(n+m-2)] + \dots \\ &+ (-1)^{m-2} \mathfrak{A}_0[-(n+1)] + (-1)^{m-1} \mathfrak{A}_0(-n) = 0, \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation de récurrence (2).

II. *Les modules des deux racines les plus proches de l'origine sont identiques.*

Si les modules des racines de l'équation, algébrique ou non, vérifient les inégalités

$$|x_1| \leq |x_2| < |x_3| \leq |x_4| \leq \dots,$$

on peut former l'équation du second degré admettant les racines x_1, x_2 , sous condition qu'il existe une fonction $\Phi(z)$ n'ayant aucun

pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_2|$ et telle que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série suivant les puissances entières de la variable z . En effet, on peut écrire

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \frac{A}{\alpha_1 - z} + \frac{B}{\alpha_2 - z} + \frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} \quad \text{où} \quad F_1(z) = \frac{F(z)}{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)},$$

$$\frac{A}{\alpha_1 - z} = \frac{A}{\alpha_1} + \frac{Az}{\alpha_1^2} + \frac{Az^2}{\alpha_1^3} + \dots + \frac{Az^{n-1}}{\alpha_1^n} + \dots,$$

$$\frac{B}{\alpha_2 - z} = \frac{B}{\alpha_2} + \frac{Bz}{\alpha_2^2} + \frac{Bz^2}{\alpha_2^3} + \dots + \frac{Bz^{n-1}}{\alpha_2^n} + \dots,$$

$$(4) \quad \frac{\Phi(z)}{F(z)} = s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \dots + s'_n z^n + \dots,$$

et si

$$\frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots + s_n z^n + \dots :$$

1°

$$s_n = \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n;$$

2° Les quantités $\alpha_1^n s'_n$, $\alpha_2^n s'_n$ tendent vers zéro quand n croit indéfiniment.

Car la série (4) converge par hypothèse dans un cercle de rayon $> |\alpha_2|$, puisque les pôles de $\Phi(z)$ [ou $\Phi_1(z)$] et les zéros de $F_1(z)$ sont extérieurs au cercle de rayon $|\alpha_2|$. Donc les séries $\Sigma \alpha_1^n s'_n$, $\Sigma \alpha_2^n s'_n$ convergent, ce qui justifie la proposition. Cela posé, étudions le déterminant

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A}{\alpha_1^n} + \frac{B}{\alpha_2^n} + s'_{n-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la deuxième colonne par α_1^p et retranchant de la première, il vient

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} \frac{B}{\alpha_2^n} \left(1 - \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} \left(1 - \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la première colonne par $\frac{1}{\alpha_2^p}$ et retranchant de la deuxième, multipliée au préalable par $1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}$,

$$D_{n,p} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} \frac{B}{\alpha_2^p} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_{n-1} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{p+1}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_n + s'_{n+p} \end{vmatrix};$$

d'où

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} B \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + \alpha_2 \alpha_2^{n-1} s'_{n-1} - \alpha_1 \frac{\alpha_1^{p-1}}{\alpha_2^{p-1}} \alpha_2^{n-p-1} s'_{n+p-1} & A \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \alpha_1 \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \alpha_1^{n-1} s'_{n-1} + \alpha_1 \alpha_1^{n+p-1} s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + \alpha_2 s'_n - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \alpha_2^{n+p} s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \alpha_1^n s'_n + \alpha_1^{n+p} s'_{n+p} \end{vmatrix}$$

Les expressions *soulignées* tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, p restant fini et bien déterminé.

Donc

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p} = \frac{AB}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} & 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \\ \frac{1}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) & \frac{1}{\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) \end{vmatrix} + R_{n,p} = AB \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) + R_{n,p},$$

où $R_{n,p}$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment, p restant fini, et

$$\alpha_1^{n+p+1} \alpha_2^{n+p+1} D_{n,p} = AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}.$$

On en conclut

$$\frac{\alpha_1^{n+p+1} \alpha_2^{n+p+1} D_{n,p}}{\alpha_1^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} D_{n+1,p}} = \frac{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}}{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n+1,p}};$$

d'où

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n \\ s_n & s_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2$$

On en conclut encore

$$\frac{\alpha_2^{n+\rho+2} \alpha_2^{n+\rho+2} D_{n,\rho+1}}{\alpha_1^{n+\rho+2} \alpha_2^{n+\rho+2} D_{n+1,\rho}} = \frac{AB(\alpha_2^{\rho+1} - \alpha_1^{\rho+1})(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{\rho+2} R_{n,\rho+1}}{AB(\alpha_2^\rho - \alpha_1^\rho)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^\rho R_{n+1,\rho}};$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+\rho} \\ s_n & s_{n+\rho+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+\rho} \\ s_{n+1} & s_{n+\rho+1} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_2^{\rho+1} - \alpha_1^{\rho+1}}{\alpha_2^\rho - \alpha_1^\rho}.$$

En particulier,

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_n & s_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Ainsi, quand n croît indéfiniment, les racines de l'équation

$$(7) \quad z^2 - \frac{s_n s_{n+1} - s_{n-1} s_{n+2}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} z + \frac{s_n^2 - s_{n-1} s_{n+1}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} = 0$$

tendent vers α_1, α_2 .

On peut de même construire l'équation ayant pour racines les deux racines de plus grand module α_1, α_2 sous condition que leurs modules soient plus grands que les modules de toutes les autres racines.

Wronski, au moyen des fonctions *aleph* composées, qui sont aux fonctions *aleph* simples ce que les coefficients de l'équation en α_1, α_2 sont à $s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$, a formé semblablement l'équation (7) et l'équation donnant les deux racines de plus grands modules.

III *Les modules des $p(p > 2)$ racines les plus proches du point $z = 0$ sont identiques.*

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leq |\alpha_{p+2}| \leq \dots$$

Dans ce cas, comme dans le cas de $p = 2$, on peut former ⁽¹⁾, et Wronski l'avait fait, l'équation de degré p admettant les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; Wronski avait aussi formé l'équation admettant les racines $\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_m$ si $|\alpha|_q > |\alpha_{q+1}| \leq |\alpha_{q+2}| \leq \dots \leq |\alpha_m|$.

Il est plus simple d'observer qu'une substitution $z = a + Z$ où a est convenablement choisi, et d'ailleurs facile à choisir, fait que une ou deux racines seulement se trouvent sur le cercle de convergence de $\frac{\Phi(Z)}{F(Z)}$.

La méthode indiquée donnera donc, dans tous les cas, soit *une*, soit *deux* racines : je parle de valeurs approchées. D'où formation possible d'une équation approchée; admettant comme racines des valeurs approchées des autres racines de la proposée. On pourra calculer ainsi des valeurs *approchées* des racines de l'équation proposée. Cela permettra de construire un cercle \tilde{C} de centre $x = h$, $y = k$ à l'intérieur duquel sera la *seule* racine α_λ que l'on voudra calculer avec telle approximation fixée à l'avance. Faisant, en effet, sur l'équation, la substitution

$$x + iy = z = X + h + i(Y + k),$$

l'équation transformée en Z aura la *seule* racine $\alpha_\lambda + h + ik$ dans le cercle C ayant son centre au point $Z = 0$. Dès lors, la méthode exposée au paragraphe I permettra de calculer $\alpha_\lambda + h + ik$, d'où α_λ , avec telle approximation que l'on voudra.

IV. Dans la méthode exposée, le choix des indéterminées

$$s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$$

influe sur la convergence plus ou moins rapide des rapports déterminant les racines. *Nous n'avons actuellement aucun moyen d'étudier A PRIORI la rapidité de la convergence. Si nous remarquons que dans les équations traitées par Wronski (et ces équations ne peuvent avoir été choisies à cet effet) la convergence s'affirme comme TRÈS RAPIDE, nous devons conclure que le CHOIX DES FONCTIONS ALEPH EST, SELON toute vraisemblance, PARFAITEMENT APPROPRIÉ A LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.*

(1) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 71.

Conclusion. — H. Wronski avait indiqué, voici près d'un siècle, la méthode de réduction des équations numériques algébriques que de récents travaux ont retrouvée, seule méthode qui atteigne pleinement le but proposé.

A vrai dire, Wronski n'avait pas fait la discussion de sa méthode : mais les notions restreintes que les géomètres ses contemporains avaient de l'Analyse ne lui permettaient pas de faire cette discussion.

Du moins, Wronski a-t-il eu le mérite d'indiquer une *base*, les fonctions *aleph*, permettant de construire des expressions rapidement convergentes, ce que nul après lui n'a tenté.

Cependant, l'exposé de Wronski est à ce point... *obscur* et plus, qu'il ne pouvait guère être compris tel qu'il est. *Il était nécessaire, pourrait-on dire, que les résultats de l'énigmatique Polonais fussent retrouvés par une voie nouvelle.*
