BULLETIN DE LA S. M. F.

H. ANDOYER

Sur la sommation des séries

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 36-41
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__36_1>

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES;

Par M. H. Andoyer.

La méthode qui se présente naturellement pour obtenir la somme d'une série numérique consiste à calculer directement la somme d'un certain nombre de termes à partir du premier, et à fixer, quand on le peut, une limite de l'erreur ainsi commise. Malheureusement, il arrive trop souvent que cette méthode n'a aucune valeur pratique : c'est ainsi qu'en calculant exactement la somme des vingt mille premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

et en supposant que les calculs eux-mêmes ne donnent lieu à aucune erreur, on obtient un résultat dont l'erreur atteint encore 0,000025 environ.

Cependant les ouvrages classiques en usage de nos jours sont muets sur les méthodes à employer pour obtenir des résultats plus satisfaisants. Il ne semblera donc peut-être pas inutile d'indiquer comment on peut procéder pour obtenir rapidement, avec une grande précision, facile d'ailleurs à évaluer, la somme de certaines séries formant une classe très étendue. Le principe de la méthode que nous allons expliquer est indiqué et longuement développé par J. Stirling (*Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum,* Londres, 1730); nous n'avons fait que le présenter d'une façon générale et approprier son exposition aux habitudes actuelles.

Envisageons la série convergente de terme général u_n, l'indice n prenant successivement les valeurs n_0, n_0+1, n_0+2, ..., telle que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit développable suivant les puissances décroissantes de n; c'est-à-dire que, q étant un entier positif quelconque, on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}},$$

α_0, α_1, α_2, ..., α_q étant des constantes, et A_{q+1} une fonction de n ayant une limite quand n devient infini.

On a d'ailleurs $|\alpha_0| \leqq 1$; de plus, si $\alpha_0 = 1$, il faut, comme on sait d'après la règle de Gauss, $\alpha_1 < -1$; et si $\alpha_0 = -1$, le premier des coefficients α_1, α_2, ... qui n'est pas nul est positif.

Si

$$s_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$
$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$

la somme de la série est

$$S = s_n + r_n.$$

Soit z_n une fonction de n ayant comme limite zéro pour n infini, et faisons

$$u'_n = u_n + z_{n+1} - z_n;$$

la série dont le terme général est u'_n est convergente, et si l'on fait

$$r'_n = u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots,$$

on a évidemment

$$r_n = z_{n+1} + r'_n;$$

si de plus on pose

$$z_n = u_n t_n,$$

on a

$$u'_n = u_n\left(1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}\right),$$

avec

$$r_n = u_{n+1} t_{n+1} + r'_n.$$

Le calcul de r_n est ainsi ramené à celui de r'_n; en choisissant t_n de façon convenable, on pourra, comme nous allons le voir, obtenir une valeur approchée de r_n comprise entre des limites faciles à déterminer, et, en ajoutant à r_n la somme s_n calculée directement, on aura finalement S avec une approximation qu'on peut fixer.

Pour le choix de t_n il est nécessaire de distinguer deux cas, suivant que α_0 est inférieur ou égal à 1.

Supposons d'abord $\alpha_0 < 1$, et faisons

$$t_{n+1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

les β_i étant des constantes, p un entier positif quelconque. On aura par suite

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n-1} + \frac{\beta_2}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{\beta_{p+1}}{(n-1)^{p+1}},$$

et en développant chaque terme suivant les puissances décroissantes de n, on a

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \frac{\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1}{n^3} + \ldots$$
$$+ \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\beta_{p-2} + \ldots}{n^p} + \frac{B_{p+1}}{n^{p+1}},$$

la loi des numérateurs étant évidente, et B_{p+1} étant une fonction de n ayant une limite pour n infini.

Si maintenant nous nous servons de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en y faisant $q=p$, on voit que l'expression

$$T = 1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}$$

se développe elle-même sous la forme

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots + \frac{\gamma_p}{n^p} + \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ étant des constantes, et C_{p+1} une fonction de n ayant une limite pour n infini. On voit alors que, à cause de $1-\alpha_0 \neq 0$, on peut choisir $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ de façon à annuler $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$, et de plus β_{p+1} de façon que la limite de C_{p+1} ait une valeur donnée à l'avance quelconque.

Si l'on a $\alpha_0 = 1$, le calcul précédent est impossible; mais on arrive au même résultat en faisant

$$t_{n+1} = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p},$$

d'où

$$t_n = \beta n + (\beta_0 - \beta) + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \ldots}{n^p} + \frac{B_{p+1}}{n^{p+1}},$$

comme plus haut; en se servant de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, où l'on fait $q = p+1$, on peut encore déterminer $\beta, \beta_0, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ de façon que T ait la forme $\frac{C_{p+1}}{n^{p+1}}$, C_{p+1} ayant une limite arbitraire.

Ainsi, dans tous les cas

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

C_{p+1} ayant une limite quelconque; or, on peut prendre n assez grand pour que la somme r'_n ait le signe de son premier terme u'_{n+1}; en supposant donc la limite de C_{p+1} successivement positive et négative, on aura deux valeurs de r_n, fournies par l'expression $u_{n+1}\, t_{n+1}$, approchées en sens contraire, et d'autant moins différentes que p sera plus grand. Il en sera de même pour la somme S de la série proposée.

Les exemples suivants feront bien comprendre l'esprit de la méthode et son application.

1° Soit

$$u_n = \frac{(-1)^{n-n_0} C}{n-1},$$

C étant une constante.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{1}{n},$$

et l'on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_5 = -\beta_5\left[1 + \left(\frac{n}{n-1}\right)^5 - \frac{1}{n}\right] + \frac{n(2n-1)^2}{8(n-1)^3}.$$

Pour $\beta_5 = 0$, la limite de C_5 est positive; pour $\beta_5 = \frac{1}{2}$, elle est négative, en donnant donc successivement ces deux valeurs à β_5 dans t_{n+1}, la valeur de r_n sera comprise entre les deux valeurs obtenues pour $u_{n+1} t_{n+1}$. Faisons par exemple $C = 1$, $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\log \text{nép}\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$$

On a directement

$$s_n = 0{,}745634920\ldots,$$

et r_n est compris entre $-0{,}0524875$ et $-0{,}0524880$; donc S est compris entre

$$0{,}69314742\ldots \quad \text{et} \quad 0{,}69314692\ldots.$$

De même en faisant

$$C = 2, \qquad n_0 = \frac{3}{2}, \qquad n = \frac{19}{2},$$

de sorte que la série à sommer est

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

on a directement

$$s_n = 3{,}25236593\ldots,$$

et r_n est compris entre $-0{,}11077263\ldots$ et $-0{,}11077399$; donc

S est compris entre

$$3,14159330\ldots \quad \text{et} \quad 3,14159194\ldots.$$

2° Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^2},$$

de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2};$$

on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{30n^3} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_6 = \frac{5n^3 - 5n^2}{30(n-1)^3} - \beta_5\left[\frac{n^6}{(n-1)^5} - n + 2 - \frac{1}{n}\right].$$

Pour $\beta_5 = 0$, la limite de C_6 est positive; pour $\beta_5 = \frac{1}{10}$, elle est négative.

Faisant $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots;$$

on a directement

$$s_n = 1,539767731\ldots,$$

et r_n est compris entre

$$0,105166333\ldots \quad \text{et} \quad 0,105166343\ldots;$$

donc S est compris entre

$$1,644934064\ldots \quad \text{et} \quad 1,644934074\ldots.$$

Pratiquement, on se dispense de calculer la quantité C_{p+1}, et l'allure du développement de t_{n+1} permet de se rendre compte d'une façon suffisante de l'approximation obtenue en arrêtant ce développement à un certain rang.