E. MAILLET

Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles ; applications à un système hydraulique de *n* réservoirs

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 129-145

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__129_0>

SUR LES SOLUTIONS DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES; APPLICATIONS A UN SYSTÈME HYDRAULIQUE DE n RÉSERVOIRS;

PAR M. ED. MAILLET.

I.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

J'ai étudié ailleurs [1] les variations des débits des systèmes de réservoirs cylindriques munis d'orifices (ajutages ou vannes) ou de déversoirs (ces derniers non noyés) de communication.

Je reviens ici sur cette question en discutant des cas plus généraux, particulièrement pour n réservoirs munis exclusivement de déversoirs non noyés. Je trouve encore dans ce dernier cas une famille de solutions simples asymptotiques à toutes les solutions, même quand on regarde comme légèrement variables avec la charge, conformément à l'expérience (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.), certains coefficients qui entrent dans les formules du débit des déversoirs.

J'indique en même temps des systèmes d'équations différentielles non linéaires corrélatifs ou plus généraux dont on peut trouver au moins une solution particulière simple dépendant d'une constante arbitraire et qui est parfois encore asymptotique à toute une catégorie de solutions.

II.

Exposé du problème. — Je considère n réservoirs cylindriques de surfaces $S_1, \ldots, S_n$; par hypothèse, S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ possède des déversoirs superficiels non noyés dont la crête est horizontale, à un même niveau y_i pour S_i, si S_i en a plusieurs. Les eaux issues de S_i alimentent un ou plusieurs des réservoirs

(1) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, 13 mars 1905.

$S_{i+1}, \ldots, S_n$ et peuvent aussi se déverser en partie à l'extérieur [1]; S_n se déverse à l'extérieur.

Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ les niveaux respectifs des n réservoirs à l'instant t; je suppose toujours

$$y_i > Y_{i+j} \geqq y_{i+j},$$

quand S_i alimente S_{i+j}, de façon qu'aucun des déversoirs ne soit noyé.

Pendant le temps dt, le réservoir S_i reçoit de $S_1, \ldots, S_{i-1}$ des quantités d'eau

$$\left[a_{i1}(Y_1 - y_1)^{\frac{3}{2}} + \ldots + a_{i,i-1}(Y_{i-1} - y_{i-1})^{\frac{3}{2}}\right] dt,$$

certains des coefficients a_{ij} pouvant être nuls; il perd par ses déversoirs propres

$$a_{ii}(Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}}\, dt.$$

D'après l'expérience [2], $a_{i1}, \ldots, a_{ii}$ sont peu variables quand $Y_1, \ldots, Y_n$ varient dans des limites étendues, les déversoirs ayant des largeurs constantes; je les supposerai constants; au surplus, des variations convenables, légères, des largeurs des déversoirs avec l'épaisseur des lames déversantes, permettraient d'assurer, je pense, la constance des a_{ij}, ou à peu près.

Donc

$$S_i \frac{dY_i}{dt} = a_{i1}(Y_1 - y_1)^{\frac{3}{2}} + \ldots + a_{i,i-1}(Y_{i-1} - y_{i-1})^{\frac{3}{2}} - a_{ii}(Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}}.$$

Je pose

$$u_j = (Y_j - y_j)^{\frac{1}{2}} > 0, \tag{1}$$

u_j étant ainsi proportionnel à la vitesse moyenne sur la crête (ou au voisinage) des déversoirs corrélatifs de S_j, et j'obtiens, pour

---

(1) Cette dernière hypothèse pourrait être laissée de côté, car il suffit, pour qu'on puisse le faire, d'ajouter un dernier réservoir auxiliaire R assez bas, recueillant celles des eaux des autres réservoirs qui pourraient se déverser à l'extérieur.

(2) *Voir* Collignon, *Hydraulique*, 2e édit., 1880, p. 148, Paris, Dunod; ou encore l'*Hydraulique* de Graeff, t. II, ou celle de M. Flamant, 1re édit., 1891, p. 108; aussi les *Mémoires* de M. Bazin dans les *Annales des Ponts et Chaussées*.

définir le mouvement, les équations différentielles

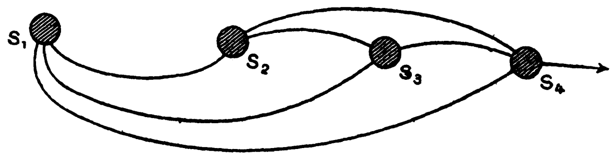
$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2u_1 \frac{du_1}{dt} = -\lambda_{11} u_1^2, \\ & 2u_i \frac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda_{ii} u_i^2 \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.
$$

où les λ_{ij} sont $\geqq 0$ et $\lambda_{ii} > 0$.

Il est bien entendu que certains des λ_{ij}, quand $i \neq j$, et même tous, peuvent être nuls pour chaque valeur de i (¹).

Le schéma ci-contre indique la distribution correspondante des communications hydrauliques quand $n = 4$ et que tous les λ sont $\neq 0$.

Fig. 1.



Solutions simples $u_i = \dfrac{\rho_i}{a + t}$. — Le système (2) est compris

(¹) Des analogies ne sont pas impossibles dans la nature, chaque réservoir pouvant être constitué, par exemple, soit par un lac souterrain, soit par un banc de calcaire très fissuré horizontalement et verticalement, où les communications sont assez faciles pour que les variations de niveau d'eau s'y fassent sentir rapidement à chaque instant. Des nappes d'eau de cette nature existent probablement dans le *cran,* sorte de craie tuffeau blanche et fendillée, qui ne présente pas de grosses masses compactes (à Venette, près Compiègne, village situé à 600ᵐ environ du barrage de Venette, sur l'Oise, lors de la mise en chômage de la rivière, les puits se vident en 24 heures et reviennent au niveau primitif dans le même délai quand le chômage cesse).

Soit un massif calcaire (ou autre) étendu, où toutes les fissures et toutes les poches communiquent très vite au point de vue hydraulique, et supposé limité par des plans presque verticaux sur une certaine épaisseur. Il pourra jouer le rôle d'un réservoir à peu près cylindrique : il suffira pour cela que la proportion du vide au plein dans chaque tranche horizontale soit à peu près constante, ce qui n'est pas invraisemblable, au moins pour la partie du massif qui ne serait pas constamment noyée et qui n'a pas besoin d'avoir une grande épaisseur, une dizaine de mètres au plus.

D'autre part, on peut encore songer à traiter le cas où le dernier des réservoirs ne se vide pas à l'extérieur et est rempli par les autres. Il suffira d'ajouter aux dans le système plus général

$$(3)\qquad u_i \frac{du_i}{dt} = \mu_{i1} u_1^3 + \ldots + \mu_{in} u_n^3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui admet la solution

$$(4)\qquad u_i = \frac{\rho_i}{a+t} \qquad (\rho_i,\ a \text{ constantes}),$$

les ρ_i étant déterminés par le système d'équations

$$-\rho_i^2 = \mu_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \mu_{in}\rho_n^3.$$

Ce dernier système a, dans des cas étendus, au moins un système de solutions réelles, car si l'on se donne les ρ_i et $n(n-1)$ des quantités μ_{ij}, les n autres se trouvent déterminées, pourvu qu'une seule de ces n autres figure dans chaque équation.

Dans le cas du système (2),

$$-2\rho_1^2 = -\lambda_{11}\rho_1^3,$$
$$-2\rho_i^2 = \lambda_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^3 - \lambda_{ii}\rho_i^3,$$

ou

$$(5)\qquad \begin{cases} \lambda_{11}\rho_1 = 2, \\ \lambda_{ii}\rho_i^3 - 2\rho_i^2 - (\lambda_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^3) = 0. \end{cases}$$

L'équation générale (5) admet toujours une solution positive

---

n réservoirs considérés, dont le mouvement continue à être régi par (2) et a les mêmes propriétés, un $(n+1)^{\text{ième}}$ réservoir de niveau Y_{n+1} croissant. On pose

$$Y_{n+1} = u_{n+1}^2,$$

et l'on a l'équation différentielle supplémentaire

$$\frac{dY_{n+1}}{dt} = \lambda_{n+1,1} u_1^3 + \ldots + \lambda_{n+1,n} u_n^3 = 2 u_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dt}$$

à ajouter aux équations (2). Quand $u_1, \ldots, u_n$ sont de la forme

$$\frac{\rho_i}{a+t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

u_{n+1} est tel que $\frac{dY_{n+1}}{dt} = \frac{A}{(a+t)^3}$, avec $A > 0$; $Y_{n+1} = \alpha - \frac{1}{2}\frac{A}{(a+t)^2}$, où α est évidemment positif : c'est la valeur asymptotique de Y_{n+1} pour toutes les conditions initiales du système correspondant à un même volume total contenu dans les réservoirs, d'après ce qui est établi plus loin.

$\rho_i > 0$, et une seule, fonction de $\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}$; a reste arbitraire, et le système de réservoirs est toujours susceptible des mouvements définis par (4) et (5). Ces mouvements ne sont pas d'ailleurs distincts au fond, car changer la valeur de a revient à changer l'origine des temps, et, de plus, les diverses quantités $\frac{\rho_j}{a+t}$, pour une même valeur de j, sont toutes asymptotiques à l'une d'elles, le rapport de deux quelconques tendant vers 1 quand t croît indéfiniment.

Stabilité de la solution $u_i = \frac{\rho_i}{a+t}$. — Je vais établir que toute solution du système (2) est asymptotique à une des solutions (4) et (5), pour laquelle la valeur de a est déterminée par le régime du premier réservoir S_1.

Cette propriété est vraie quand $n = 1$: j'admettrai qu'elle le soit pour les $i-1$ premiers réservoirs, et je vais la démontrer pour i; autrement dit, j'admets que, lorsque t est assez grand,

$$\frac{u_j(a+t)}{\rho_j} \qquad (j \leqq i-1)$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité, et je vais établir qu'il en est de même pour $u_i \frac{(a+t)}{\rho_i}$.

Je pose

$$u_i = u_1 z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ z_1 = 1), \tag{6}$$
$$du_i = u_1\, dz_i + z_i\, du_1.$$

D'après (2),

$$dt = -\frac{2\,du_1}{\lambda_{11} u_1^2} = \frac{2 u_i\, du_i}{\lambda_{i1} u_1^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1} u_{i-1}^3 - \lambda_{ii} u_i^3},$$

$$-\frac{du_1}{\lambda_{11}} = \frac{z_i(u_1\, dz_i + z_i\, du_1)}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^3 - \lambda_{ii} z_i^3},$$

$$du_1(\lambda_{i1} z_i^3 - \lambda_{i1} - \ldots - \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^3 - \lambda_{11} z_i^2) = \lambda_{11} u_1 z_i\, dz_i,$$

$$\frac{-u_1\, dt}{2} = \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1} = \frac{z_i\, dz_i}{\lambda_{ii} z_i^3 - \lambda_{11} z_i^2 - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^3)}. \tag{7}$$

Je pose

$$\chi_i(z_i) = \lambda_{ii} z_i^3 - \lambda_{11} z_i^2 - (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^3). \tag{8}$$

L'équation

$$\chi_i(z_i) = 0$$

possède une et une seule racine positive $\zeta_i > 0$ fonction de $z_2, \ldots, z_{i-1}$ (les z_j sont $\geqq 0$). On sait que, quand t croît indéfiniment, $z_2, \ldots, z_{i-1}$ ont pour limites $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{\rho_3}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}$; t étant suffisamment grand, $z_2, \ldots, z_{i-1}$ sont aussi voisins qu'on veut de ces limites; ζ_i est aussi voisin qu'on veut de la racine positive > 0 unique de

$$\lambda_{ii} z_i^2 - \lambda_{11} z_i^2 - \frac{1}{\rho_1^2}(\lambda_{i1}\rho_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^2) = 0,$$

ou de

$$\lambda_{ii}\rho_1^2 z_i^2 - 2\rho_1^2 z_i^2 - (\lambda_{i1}\rho_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^2) = 0,$$

laquelle est $\frac{\rho_i}{\rho_1}$, d'après (5).

D'après (7) et (8), quand $z_i > \zeta_i$, $\frac{dz_i}{dt}$ est négatif et z_i décroît; quand $z_i < \zeta_i$, $\frac{dz_i}{dt}$ est positif et z_i croît : z_i reste limité et > 0, quel que soit t fini.

Je dis que, quel que soit l'intervalle de t_2 à t_3, quand t_2, puis $t_3 - t_2$, sont assez grands, il y a une valeur t_4 de t au moins, avec $t_3 \geqq t_4 \geqq t_2$, pour laquelle $|\chi_i(z_i)|$ est aussi petit qu'on veut.

En effet, je suppose que, dans cet intervalle, $|\chi_i(z_i)|$ reste $> B_1$ (B_1 positif fixe). D'après (7),

$$z_i \frac{dz_i}{dt} = -\frac{u_1}{2}\chi_i(z_i),$$

$$\left| z_i \frac{dz_i}{dt} \right| \geqq B_1 \frac{u_1}{2} = \frac{B_1}{2}\frac{\rho_1}{a+t},$$

et $z_i \frac{dz_i}{dt}$ conserve un signe constant :

$$|(z_i^2)|_{t_2}^{t_3} \geqq B_1 \rho_1 \log\frac{a+t_3}{a+t_2}.$$

On sait que z_i reste limité, alors que $\log\frac{a+t_3}{a+t_2}$ est aussi grand qu'on veut quand $t_3 - t_2$ est assez grand : on est conduit à une absurdité.

Je considère maintenant ce qui se passe à partir de l'instant t_4, et je suppose que, à un moment quelconque ultérieur, z_i vienne à différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ d'une quantité fixe ε arbitraire :

$$\left|z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1}\right| = \varepsilon.$$

t étant assez grand,

$$\left|\zeta_i - \frac{\rho_i}{\rho_1}\right| < \varepsilon;$$

si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} > 0$, $z_i > \zeta_i$ et, d'après (7), z_i décroît; si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} < 0$, $z_i < \zeta_i$ et, d'après (7), z_i croît. A chaque instant, z_i ne peut différer de ζ_i de plus de ε en plus ou en moins.

t_2 et t_3 étant pris assez grands, ε peut être pris aussi petit qu'on veut; donc z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$. C. Q. F. D.

Remarque. — Si, à un instant quelconque du mouvement, on a

$$z_j = \frac{\rho_j}{\rho_1}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, i$, u_1 étant forcément de la forme $\frac{\rho_1}{a+t}$, en vertu du théorème de Cauchy sur l'unicité de la solution du système (2) ou des i premières équations de ce système correspondant à des valeurs données des u_j à un instant donné, le mouvement sera entièrement défini par (4) et (5) pour les i premiers réservoirs. Pour les autres, la solution est encore régie par (6) et (7).

Systèmes de réservoirs avec régime propre permanent. — Chaque réservoir d'un pareil système reçoit simultanément de l'extérieur des volumes d'eau (provenant de pluies par exemple) $\sigma_1 S_1, \ldots, \sigma_n S_n$ sensiblement proportionnels, en sorte que

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = h_2, \quad \ldots, \quad \frac{\sigma_n}{\sigma_1} = h_n$$

sont des nombres à peu près fixes pour toutes les venues d'eau. Le système sera dit posséder un régime propre *permanent* si l'arrivée aux réservoirs de ces quantités, au moment où une des solutions asymptotiques simples est réalisée, a seulement pour effet, après une courte période troublée, que l'on néglige dans le calcul, de rétablir une solution asymptotique simple.

Pour un réservoir unique ($n=1$), la réponse est toujours affirmative. Je prends n quelconque : les niveaux deviennent, après chaque venue d'eau, si le régime propre permanent est possible,

$$\frac{\rho_i^2}{(a+t)^2}+\sigma_1 h_i=\frac{\rho_i^2}{(a'+t)^2} \qquad (h_1=1),$$

et l'on en conclut sans peine que la condition nécessaire et suffisante est

$$h_j=\frac{\rho_j^2}{\rho_1^2}.$$

Les équations précédentes se réduisent alors à une seule qui permet de calculer a'.

On voit que, pour $n \geqq 2$, les systèmes de réservoirs en question sont des systèmes particuliers quand les h_j sont donnés. Un système de réservoirs quelconque est susceptible d'un régime propre permanent pour un système de valeurs des h_j, c'est-à-dire, si les venues d'eau sont dues aux pluies, pour une répartition convenable des pluies sur les bassins versants. Mais, dans de plus larges limites, si les h_j ne diffèrent pas trop de $\frac{\rho_j^2}{\rho_1^2}$, les choses se passeront pratiquement, au bout d'un certain temps après chaque venue d'eau, à peu près comme s'il y avait un régime propre permanent, grâce à l'existence des solutions asymptotiques simples à toutes les solutions.

III.

Cas où les λ_{ij} sont légèrement variables. — On sait, d'après de nombreuses expériences (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.) que, si les déversoirs sont supposés avoir une largeur constante, les coefficients a_{ij}, par suite les coefficients λ_{ij}, dans (2), seront légèrement variables [1] avec les $Y_i - y_i$ ou les u_i. On peut se demander dans quelle mesure les conclusions précédentes se trouvent altérées de ce fait.

---

[1] Assez souvent dans la proportion de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{20}$ de leur valeur moyenne en plus ou en moins dans les limites des expériences.

J'admettrai que, dans les limites où varie u_i, les coefficients λ_{ii}, $\lambda_{i+1,i}$, ..., λ_{ni}, qui sont fonctions de u_i seul, restent positifs, limités supérieurement et inférieurement, et tendent, s'ils sont $\neq 0$, vers des limites fixes > 0 lorsque u_i tend vers o.

La première équation (2) donne

$$dt = -\frac{2\,du_1}{\lambda_{11} u_1^2},$$

où λ_{11} est fonction légèrement variable de u_1;

$$t = -2\int \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1^2},$$

et u_1 décroît quand t croît; λ_{11} restant toujours compris entre certaines limites finies > 0, on pourra écrire $t - t_0 = \mathrm{M}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(0)}}\right)$, où M est positif et compris entre les deux valeurs extrêmes de $\frac{2}{\lambda_{11}}$ pour $t \geqq t_0$: il en résulte que u_1 tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

Je dis que, si λ'_{11} est la limite de λ_{11} pour $u_1 = 0$, M tend vers $\rho_1 = \frac{2}{\lambda'_{11}}$ quand t croît indéfiniment.

En effet, t_1 étant suffisamment grand par rapport à t_0,

$$t - t_1 = \mathrm{M}_1\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(1)}}\right),$$

où $u_1^{(1)}$ est aussi petit qu'on veut et $|\mathrm{M}_1 - \rho_1| < \varepsilon$, ε étant un nombre fixe aussi petit qu'on veut;

$$t - t_0 = (t - t_1) + (t_1 - t_0) = \mathrm{M}_1\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(1)}}\right) + \mathrm{M}'\left(\frac{1}{u_1^{(1)}} - \frac{1}{u_1^{(0)}}\right).$$

t_1 étant fixé comme il est dit ci-dessus, M' est fixé, et il en résulte que, quand t croît indéfiniment, u_1 tend vers o et $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}_1}$ vers l'unité; quand t est assez grand, on a

$$|\mathrm{M} - \mathrm{M}_1| < \varepsilon, \qquad |\mathrm{M}_1 - \rho_1| < \varepsilon, \qquad |\mathrm{M} - \rho_1| < 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire que, quand t croît indéfiniment, M ne peut différer de ρ_1 de plus de 2ε, si petit que soit ε, et a pour limite $\frac{2}{\lambda'_{11}} = \rho_1$.

Dès lors, quand t est assez grand,

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1^{(0)}} + \frac{t - t_0}{M},$$

et, a étant fixe et arbitraire,

$$\frac{\rho_1}{u_1(a+t)} = \frac{\rho_1}{(a+t)u_1^{(0)}} + \frac{t-t_0}{M(a+t)}\rho_1$$

a pour limite l'unité, quel que soit a, quand t croît indéfiniment.

Ceci établi, je considère le système qu'on déduit de (2) en remplaçant les λ_{ij} par leurs valeurs limites λ_{ij} pour $u_1, \ldots, u_n$ tendant vers zéro :

$$(2\ bis) \qquad 2u'_i \frac{du'_i}{dt} = \lambda'_{i1} u_1^2 + \ldots + \lambda'_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda'_{ii} u_i^2,$$

et le système analogue à (5) correspondant à (2 *bis*)

$$(5\ bis) \qquad \begin{cases} \lambda'_{11}\rho_1 = 2, \\ \lambda'_{ii}\rho_i^2 - 2\rho_i^2 - (\lambda'_{i1}\rho_1^2 + \ldots + \lambda'_{i,i-1}\rho_{i-1}^2) = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, je sais que, quand $n = 1$, il existe toujours une solution de (2 *bis*) telle que

$$\frac{u_1}{u'_1} = \frac{u_1(a+t)}{\rho_1}$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité pour toutes les valeurs de t supérieures à une limite assez grande. J'admettrai alors que, pour les valeurs de t analogues,

$$\frac{u_j(a+t)}{\rho_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité. Je vais établir qu'il en est de même pour

$$\frac{u_i(a+t)}{\rho_i}.$$

La transformation (6) conduit encore aux équations (7) et (8).

Quand t croît indéfiniment, $z_2, \ldots, z_{i-1}$ ont pour limites $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}$ déterminés par (5 *bis*), et, quand t est assez grand, la racine $\zeta_i > 0$ de $\chi_i(z_i) = 0$ est aussi voisine qu'on veut de la racine positive unique $\zeta_i'' > 0$ de

$$(9) \qquad \lambda_{ii}\rho_1^3 z_i^3 - 2\rho_1^3 z_i^3 - (\lambda'_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \lambda'_{i,i-1}\rho_{i-1}^3) = 0,$$

car $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i,i-1}$ ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_{i-1}$ et sont aussi voisins qu'on veut de $\lambda'_{i1}, \ldots, \lambda'_{i,i-1}$ quand t est assez grand.

λ_{ii} étant toujours fini et $\neq 0$, ζ_i'' est limité.

On peut d'ailleurs prendre encore t_2, puis $t_3 - t_2$ assez grands pour que $|\chi_i(z_i)|$ devienne aussi petit qu'on veut pour une valeur de t_4 comprise entre t_2 et t_3 ; à ce moment, z_i est aussi voisin qu'on veut de ζ_i''. Or $z_i = \frac{u_i}{u_1}$, et u_1 est aussi petit qu'on veut; donc aussi u_i. Par suite λ_{ii} est aussi voisin qu'on veut de sa limite λ'_{ii}, et ζ_i'' aussi voisin qu'on veut de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$.

Ceci posé, que se passe-t-il à partir de l'instant t_4? Si, à un moment quelconque ultérieur, z_i vient à différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ d'une quantité finie positive arbitraire,

$$\left| z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| = \varepsilon.$$

t étant assez grand, et ε modéré, u_i est encore aussi petit qu'on veut, λ_{ii} diffère de λ'_{ii} d'aussi peu qu'on veut, et $\left| \zeta_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right|$ est $< \varepsilon$. Dès lors, si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} > 0$, $z_i > \zeta_i$: d'après (7), z_i décroît; si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} < 0$, $z_i < \zeta_i$: d'après (7), z_i croît. A chaque instant, z_i ne peut différer de ζ_i de plus de ε en plus ou en moins.

t_2 et t_3 étant pris assez grands, ε peut être pris aussi petit qu'on veut; donc z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$. C. Q. F. D.

Finalement *les conclusions sont les mêmes que dans le cas où les λ_{ij} sont constants.*

IV.

Systèmes de $p_1+p_2+\ldots+p_n$ réservoirs avec déversoirs. — Au lieu de S_1, je considère p_1 réservoirs cylindriques de surfaces $S_1^{(1)}, \ldots, S_1^{(p_1)}$, formant un groupe $\Sigma_1, \ldots$, au lieu de S_i, p_i réservoirs cylindriques de surfaces $S_i^{(1)}, \ldots, S_i^{(p_i)}$ formant un groupe $\Sigma_i, \ldots$; de façon que chaque réservoir du groupe Σ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) possède un ou une série de déversoirs de crête arasée au même niveau pour chaque réservoir et que ses eaux aillent, dans une proportion quelconque, alimenter les réservoirs des groupes $\Sigma_{i+1}, \ldots, \Sigma_n$, ou même se déversent en partie à l'extérieur. Je supposerai que le niveau de la crête des déversoirs de chaque réservoir est supérieur à celui des eaux des réservoirs qu'il alimente, autrement dit que les déversoirs ne sont jamais noyés.

Pour la commodité du raisonnement j'ajoute un dernier réservoir R de niveau inférieur aux crêtes des déversoirs de tous les autres, recueillant toutes les eaux que les autres déversent à l'extérieur, et les laissant échapper par un déversoir unique à crête horizontale. Puis je pose

$$S_1=S_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad S_{p_1}=S_1^{(p_1)}, \quad \ldots,$$
$$S_{p_1+\ldots+p_i+1}=S_{i+1}^{(1)}, \quad \ldots, \quad S_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}}=S_{i+1}^{(p_{i+1})},$$
$$S_{p_1+\ldots+p_n+1}=R.$$

On remarque alors que le réservoir S_j alimente exclusivement un certain nombre des réservoirs $S_{j+1}, \ldots, S_{p_1+\ldots+p_n+1}$. On se trouve donc dans le cas traité précédemment, qui est ainsi très général.

Systèmes de réservoirs avec orifices de fond ou latéraux. — Au lieu de supposer que la vidange se fait par des déversoirs, on peut supposer qu'elle se fait par des orifices (vannes, ajutages, etc.). Chaque réservoir étant muni d'orifices non noyés dont les centres de gravité sont au même niveau pour un même réservoir, on peut raisonner comme pour établir les équations (2), $(Y_j-y_j)^{\frac{3}{2}}$ étant remplacé par $(Y_j-y_j)^{\frac{1}{2}}$. On est conduit à un système d'équations différentielles compris dans les systèmes

$$(10) \qquad u_i \frac{du_i}{dt} = \mu_{i1}^1 u_1 + \ldots + \mu_{in}^1 u_n \quad (^1).$$

Systèmes de réservoirs avec un nombre quelconque d'orifices noyés ou non ou de déversoirs. — Les réservoirs sont cylindriques, les déversoirs ont leur crête horizontale et ne sont pas noyés. En prenant encore comme fonctions à déterminer u_i des quantités proportionnelles aux vitesses (moyennes) à travers chaque orifice ou chaque déversoir, on obtiendra un système de la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} u_i \dfrac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1 + \ldots + \lambda_{ip} u_p + \lambda_{i,p+1} u_{p+1}^3 + \ldots + \lambda_{iq} u_q^3 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, p+q). \end{cases}$$

Dans les seconds membres, les termes linéaires proviennent des orifices, les termes cubiques des déversoirs.

V.

Indication de problèmes analogues.

1° *Théorie de la chaleur.* — Si l'on se reporte à la figure de la page 131, on pourra supposer que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des corps conducteurs à températures $T_1, T_2, \ldots, T_n$ communiquant, au point de vue calorifique, par des fils de dimensions négligeables, de façon que le corps S_i ne fournisse de la chaleur qu'aux corps $S_{i+1}, \ldots, S_n$. On pourra supposer, ou non, négligeables les pertes par le milieu ambiant; T_n communique ou non avec un corps à température fixe T_0. A une première approximation, les échanges

---

(1) Dans le cas de $n = 2$, les systèmes (3) et (10) s'intègrent par des quadratures.

Exemple. — Dans le cas de (3), on a

$$dt = \frac{u_1\,du_1}{\mu_{11} u_1^3 + \mu_{12} u_2^3} = \frac{u_2\,du_2}{\mu_{21} u_1^3 + \mu_{22} u_2^3};$$

on est ramené à une équation différentielle homogène, puis, par le changement de variable $u_2 = u_1 z$, à des quadratures.

Le système (10) peut admettre une solution linéaire réelle $u_i = \rho_i(a + t)$ dépendant d'un paramètre arbitraire a.

de chaleur pendant le temps dt d'un corps à l'autre étant proportionnels aux différences de température, les équations différentielles seront linéaires et à coefficients constants.

2° *Théorie des gaz.* — On pourra supposer que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des réservoirs d'air ou de gaz comprimé ou raréfié qui communiquent dans des conditions variées (écoulement isotherme ou adiabatique). Je n'insiste pas ici, comptant revenir sur ce problème.

3° *Équations différentielles; systèmes plus généraux.* — On peut considérer les systèmes plus généraux que (3) et (10)

$$u_i^k \left(\frac{du_i}{dt}\right)^l = \mu_{i1} u_1^m + \ldots + \mu_{in} u_n^m$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je cherche une solution

$$u_i = \rho_i (a + t)^s,$$
$$\frac{du_i}{dt} = s \rho_i (a + t)^{s-1},$$
$$\rho_i^{k+l} s^l (a + t)^{ks+ls-l} = (\mu_{i1} \rho_1^m + \ldots + \mu_{in} \rho_n^m)(a + t)^{sm};$$

je prendrai

$$ks + ls - l = sm,$$
$$s(k + l - m) = l,$$

ce qui est toujours possible quand $k + l \neq m$. Les ρ_i sont alors déterminés par

$$\rho_i^{k+l} s^l = \mu_{i1} \rho_1^m + \ldots + \mu_{in} \rho_n^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui est toujours possible pour une infinité de systèmes de valeurs des μ_{ij}, quels que soient k, l, m $(k + l - m \neq 0)$. La solution trouvée dépend d'une constante arbitraire a; k, l, m peuvent être fractionnaires [1].

---

[1] Le système

$$u_1^q \varphi_i\left(\frac{u_2}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_1}\right) = \left(\frac{du_i}{dt}\right)^l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où φ_i est une fonction de $\frac{u_1}{u_2}, \ldots, \frac{u_n}{u_1}$, comprend comme cas particuliers les sys-

Si $k+l=m$, on cherchera une solution $u_i=\rho_i e^{\alpha t}$:

$$\rho_i^m \alpha^l = \mu_{i1}\rho_1^m + \ldots + \mu_{in}\rho_n^m,$$

ce qui conduit à une équation de degré n en α^l et donne, en général, nl valeurs de α. Quand $l=1$, le changement de variables $u_i^m = w_i$ conduit à un système d'équations linéaires à coefficients constants.

On peut montrer que, pour certains des systèmes différentiels précédents, comprenant les systèmes (2), les solutions simples ci-dessus sont asymptotiques à une catégorie de solutions. J'envisage les systèmes de la forme (¹)

$$(2\ ter)\quad \left\{\begin{array}{l} u_i^k \dfrac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1^m + \ldots + \lambda_{i,i-1} u_{i-1}^m - \lambda_{i,i} u_i^m, \\ m > 0, \quad k > 0, \quad m-k-1>0, \quad \lambda_{ij} \geqq 0, \quad \lambda_{ii} > 0, \end{array}\right.$$

qui sont analogues à (2). D'abord, on a la solution

$$u_i = \rho_i (a+t)^s,$$

avec $s = \dfrac{1}{k+1-m} < 0$,

$$\rho_i^{k+1} s = \lambda_{i1}\rho_1^m + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^m - \lambda_{i,i}\rho_i^m,$$

$$\rho_1^{k+1} s = -\lambda_{11}\rho_1^m, \qquad \rho_1^{k+1-m} = -\lambda_{11}(k+1-m) > 0,$$

ou

$$(5\ ter)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho_1^{k+1-m} = \lambda_{11}(m-k-1) > 0, \\ \lambda_{ii}\rho_i^m - \dfrac{1}{m-k-1}\rho_i^{k+1} - (\lambda_{i1}\rho_1^m + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^m) = 0. \end{array}\right.$$

---

tèmes ci-dessus et donne lieu à des remarques analogues qui, *peut-être*, n'ont pas encore été indiquées; en posant

1° Pour $l \neq \theta$, $s = \dfrac{l}{l-\theta}$, on obtient une solution

$$u_i = \rho_i (a+t)^s,$$

a étant une constante arbitraire et les ρ_i déterminés par n équations compatibles dans des cas étendus;

2° Pour $l=\theta$, on obtient des solutions

$$u_i = \rho_i e^{\alpha t},$$

α et les rapports $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \dfrac{\rho_n}{\rho_1}$ étant déterminés par n équations compatibles dans des cas étendus; chaque solution renferme encore une constante arbitraire.

(¹) On pourrait aussi prendre pour variables $u_i^{k+1} = w_i$.

Ce système a toujours un système de solutions >0 et un seul.

Le changement de variables

$$(6\ ter)\qquad u_i = u_1 z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ z_1 = 1)$$

donne

$$du_i = u_1\, dz_i + z_i\, du_1,$$

$$dt = -\frac{du_1}{\lambda_{11} u_1^{m-k}} = \frac{u_i^k\, du_i}{\lambda_{i1} u_1^m + \ldots - \lambda_{ii} u_i^m} = \frac{(u_1\, dz_i + z_1\, du_i) u_1^k z_i^k}{(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^m + \ldots - \lambda_{ii} z_i^m) u_1^m},$$

$$-\ \frac{du_1}{\lambda_{11}} = \frac{z_i^k (u_1\, dz_i + z_i\, du_1)}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^m + \ldots - \lambda_{ii} z_i^m},$$

$$du_1 [\lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m)] = \lambda_{11} u_1 z_i^k\, dz_i,$$

$$(7\ ter)\quad -u_1^{m-k-1}\, dt = \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1} = \frac{z_i^k\, dz_i}{\lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m)}.$$

Je suppose les valeurs initiales des u_i positives >0.

D'abord, u_1 étant positif ainsi que u_1^0, $\frac{du_1}{dt}$ décroît, et

$$\frac{1}{(m-k-1)\lambda_{11}} \left[\frac{1}{u_1^{m-k-1}} - \frac{1}{(u_1^0)^{m-k-1}} \right] = t - t_0$$

montre que u_1 tend vers 0 quand t croît indéfiniment. $\frac{dz_i}{dt}$ croît ou décroît encore suivant que z_i, positif, est inférieur ou supérieur à la racine positive unique $\zeta_i > 0$ de

$$\chi_i(z_i) = \lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m);$$

ζ_i est fonction de $z_2, \ldots, z_{i-1}$.

Or

$$u_1^{m-k-1} = \frac{\rho_1^{m-k-1}}{a+t},$$

$$(4\ ter)\qquad u_1 = \frac{\rho_1}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}}.$$

On admettra encore que

$$u_j = \frac{\rho_j}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

soit une solution asymptotique des $i-1$ premières équations ($2\ ter$);

$z_{i-1}, \ldots, z_2$ sont aussi voisins qu'on veut de $\frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_2}{\rho_1}$ dès que t est assez grand; z_i reste limité.

Comme dans le cas où $m=3$, $k=1$, si $|\chi_i(z_i)| > B_1$ (B_1 fixe) quand t est compris entre t_2 et t_3 assez grands,

$$\left| z_i^k \frac{dz_i}{dt} \right| > B_1 u_1^{m-k-1} = B_1 \frac{\rho_1^{m-k-1}}{a+t},$$

d'où résulte une absurdité. On voit finalement que z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ quand t croît indéfiniment, et l'on conclut :

Pour m et $k > 0$, $m-k-1>0$, $\lambda_{ij} \geqq 0$, $\lambda_{ii} > 0$, les solutions des équations (2 ter) dont les valeurs initiales sont toutes positives >0 sont asymptotiques à une solution de la famille de solutions

$$u_i = \frac{\rho_i}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

les ρ_i étant déterminés par (5 ter) et >0 (¹).

Enfin, si, pour une valeur initiale de t quelconque, les z_j sont égaux à $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_i}{\rho_1}$ quand $j=2, \ldots, i$, les $u_2, \ldots, u_i$ seront, quel que soit t, de la forme (4 *ter*), toujours en vertu du théorème de Cauchy.

Je me dispense d'examiner le cas plus général où les λ_{ij} ($j \leqq i$) varient légèrement avec u_i ($i=1, 2, \ldots, n$) : il est bien probable que les résultats trouvés quand $m=3$, $k=1$ subsistent.

(¹) Il resterait à examiner et à discuter le cas où certaines des valeurs initiales des u_i sont négatives.

On voit, par tout ce qui précède, l'intérêt que peut présenter la connaissance d'une solution particulière simple d'un système d'équations différentielles; si l'on peut établir que toute une catégorie de solutions lui est asymptotique quand la variable t croît indéfiniment, dès que t est assez grand, on a une idée approchée de toutes ces solutions.