BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JUNG

Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima, dans le mémoire de M. Peaucellier « Sur la stabilité des voûtes »

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 163-171

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__163_1>

Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima, dans le Mémoire de M. Peaucellier « Sur la stabilité des voûtes »; par M. G. JUNG, de Milan.

(Séance du 17 mai 1876.)

Le cahier n° 24 du *Mémorial du Génie* contient un intéressant Mémoire de M. Peaucellier, sur l'importance duquel le beau Rapport de MM. les commissaires de l'Académie des Sciences a appelé l'attention des géomètres et des constructeurs.

Le but de cette Note est de modifier la partie du Mémoire du savant colonel, qui se rapporte à *la courbe représentative des poussées maxima ou minima résultant de la condition de donner lieu à des courbes des pressions tangentes à l'intrados et à l'extrados,* pour en faciliter la construction et la rendre plus pratique.

Pour la description de cette courbe, je donne trois méthodes différentes, qui cependant *sont toutes basées sur la construction de certains polygones funiculaires* et sur des constructions très-élémentaires et bien connues du Calcul graphique et de la Statique graphique.

Un de nos confrères, M. le commandant du génie Dewulf, m'a fait l'honneur de m'inviter à traiter ce sujet; si donc on trouve que ces simples modifications peuvent vraiment faciliter l'application pratique de la méthode de M. Peaucellier, c'est à M. Dewulf qu'il faut en être redevable.

1. Considérons la courbe des pressions tangentes à l'intrados en un point quelconque j [1] et cherchons quelle est la poussée correspondante P et le point d'application M de cette force.

La somme des moments par rapport à j de toutes les forces qui sollicitent le voussoir $J_0 j_0 J j$ devant être nulle, on a l'équation $P \times \overline{MK} = \text{mom.} R$ (voir *Mémorial du Génie*, n° 24, p. 187), équation qui peut s'écrire

$$P \times \overline{MK} = \text{mom.} R = hR = z^2,$$

où h est la longueur de la perpendiculaire abaissée de j sur R, et z est la moyenne géométrique entre h et R.

Par rapport au point j' de l'intrados, voisin de j, on aura de même

$$P \times \overline{MK'} = \text{mom.} R' = h'R' = z'^2,$$

K' étant la projection horizontale de j' sur la clef $\overline{J_0 j_0}$, R' la résultante des forces qui sollicitent le voussoir $(J_0 j')$ et h' la longueur de la perpendiculaire abaissée de j' sur R'.

Donc

$$P(\overline{MK'} - \overline{MK}) = \text{mom.} R' - \text{mom.} R,$$

c'est-à-dire

$$P \times \overline{KK'} = P\Delta y = h'R' - hR, \tag{1}$$

ou

$$P\Delta y = h'\Delta R + R\Delta h \qquad \begin{pmatrix} \Delta R = R' - R \\ \Delta h = h' - h \end{pmatrix}, \tag{2}$$

---

[1] Pour faciliter la lecture de cette Note, je maintiens les notations adoptées par M. Peaucellier et, dans le n° 1, je me reporte à la *fig.* 15 de son Mémoire.

ou

(3) $$P\Delta y = (z' + z)\,\Delta z \quad (\Delta z = z' - z).$$

Chacune de ces trois relations identiques déterminera (approximativement) la poussée P qui donne lieu à la courbe des pressions tangente en j à l'intrados, *pourvu que j' soit assez voisin de j.*

La poussée P étant connue, son point d'application M se trouve immédiatement (n° 8).

CONSTRUCTIONS PRÉLIMINAIRES.

2. Prenons (*fig.* 1) sur l'intrados, à partir du point B où l'axe de symétrie $\overline{AB}$ est coupé par cette courbe, des points $j_0, j_1, j_2, \ldots$ [1], de manière que l'intrados soit divisé en des arcs *assez petits;* soient $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots$ les projections horizontales, sur AB des arcs $j_0 j_1, j_1 j_2, j_2 j_3, \ldots$, c'est-à-dire soit

$$\Delta y_i = K_i K_{i+1}.$$

Les poids et les surcharges des voussoirs élémentaires (Aj_0), $(j_0 j_1)$, $(j_1 j_2)$, ... sont donnés : formons-en le polygone des forces $a \ldots b_0 \ldots b_1 \ldots b_2 \ldots$ (*fig.* 2). Les rayons 0, 1, 2,... du faisceau $a(b_0 b_1 b_2 \ldots)$ représentent, en grandeur et en direction, les résultantes $R_0, R_1, R_2, \ldots$ des forces qui sollicitent respectivement les voussoirs (Aj_0), (Aj_1), (Aj_2),....

En formant le *polygone funiculaire* relatif à ce polygone des forces et correspondant à un pôle arbitraire, on aura (*fig.* 1) les $R_0, R_1, R_2, \ldots$, lignes d'action des forces du même nom.

Finalement, soient (*fig.* 1) $h_0, h_1, h_2, \ldots$ les longueurs des perpendiculaires abaissées des points $j_0, j_1, j_2, \ldots$ sur les lignes $R_0, R_1, R_2, \ldots$, respectivement.

3. *Remarque.* — Les *fig.* 1 et 2, comme toutes les autres qui suivent, sont des figures schématiques. Pour plus de clarté, on n'a tracé ni le polygone funiculaire, ni toutes les lignes R_i dans la *fig.* 1,

---

[1] Dans la *fig.* 1, ces points sont représentés par les indices 0, 1, 2, ... sur l'intrados; et les points $K_0, K_1, K_2, \ldots$ sont représentés par les mêmes indices sur l'axe de symétrie AB.

ni toutes les résultantes dans la *fig.* 2, et l'on a pris ces lignes très-inclinées.

Une droite R_i de la *fig.* 1 est parallèle au rayon $i \equiv ab_i$ de la *fig.* 2.

A partir du point K_4, on a supposé que les segments $K_4 K_5$, $K_5 K_6$, ... sont de même longueur.

CONSTRUCTION DES POUSSÉES P MOYENNANT LA FORMULE (1)

$$P_i \Delta y_i = h_{i+1} R_{i+1} - h_i R_i.$$

4. Sur l'horizontale (Δ) (*fig.* 3), *à partir d'une origine* δ, prenons les segments

$$\overline{\delta 0} = m\,\Delta y_0 = m\overline{K_0 K_1},$$
$$\overline{\delta 1} = m\,\Delta y_1 = m\overline{K_1 K_2},$$
$$\overline{\delta 2} = m\,\Delta y_2 = m\overline{K_2 K_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

m étant un nombre entier positif quelconque (¹); sur la verticale (H), passant par le point δ, prenons les segments *consécutifs*

$$\overline{00} = nh_0, \quad \overline{11} = nh_1, \quad \overline{22} = nh_2 \quad ,\ldots,$$

n étant un nombre entier positif quelconque (¹); et traçons les verticales 0, 1, 2, ... passant par les points 0, 1, 2, ... de (Δ).

Formons le polygone (²) $\Sigma \equiv 00123456\ldots$ dont les sommets 0, 1, 2, ... se trouvent sur les verticales 0, 1, 2, ..., et dont les côtés 00, 01, 12, ... passent respectivement par les points 0, $\overline{01}$, $\overline{12}$, ... de la ponctuelle (H) : par exemple le côté $i.i+1$ de Σ passe par le point $i.i+1$ de (H).

Le premier côté 00 de Σ passe par le point 0 de (H), mais est d'ailleurs arbitraire.

Formons ensuite un autre polygone $\Sigma' \equiv \overline{01}\,01'2'3'4'5'6'\ldots$ ayant pour premier côté le second côté 01 de Σ, et pour premier sommet le premier sommet 0 de Σ, et ayant, comme Σ, les autres

(¹) Dans notre *fig.* 3, $m = 10$, $n = 2$.

(²) *Voir* CULMANN : *Die graphische Statik*, 2ᵉ édition, § 4, et CREMONA : *Elementi di Calcolo grafico*, § III.

sommets $1'$, $2'$, $3'$, ... sur les verticales 1, 2, 3, ... et les autres côtés $01'$, $1'2'$, .., passant par les points $\overline{12}$, $\overline{23}$, ... de (H).

Sur une horizontale (R), à partir d'une origine r, prenons des segments

$$\begin{aligned} r0 &= R_0, \\ r1 &= R_1, \\ r2 &= R_2, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et traçons les verticales 0, 1, 2, ... par les points 0, 1, 2, ..., extrémités de ces segments.

Formons : 1° le polygone $\Pi \equiv 00123456\ldots$ dont les sommets i sont sur les verticales i, les côtés $i.i+1$ sont parallèles aux côtés $i.i+1$ de Σ, et le premier sommet 0 est arbitrairement pris sur la verticale 0;

2° Le polygone $\Pi' \equiv 1'1'\,2'3'\,4'\,5'\,6'\ldots$, dont les sommets i' sont sur les verticales i, les côtés $i'.i'+1$ sont parallèles aux côtés $i-1.i$ de Σ' (en particulier $1'\,1'$ parallèle à $\overline{10}.0$), et le premier sommet $1'$ est un point quelconque de la verticale 1.

5. Cela posé, il est évident que les segments déterminés par les côtés du polygone Π sur la verticale (P) passant par le point r, c'est-à-dire les segments consécutifs

$$00 \equiv q_0, \quad 11 \equiv q_1, \quad 22 \equiv q_2, \quad 33 \equiv q_3, \ \ldots$$

de (P) sont respectivement égaux à

$$\frac{nh_0}{m\,\Delta y_0} R_0, \quad \frac{nh_1}{m\,\Delta y_1} R_1, \quad \frac{nh_2}{m\,\Delta y_2} R_2, \quad \frac{nh_3}{m\,\Delta y_3} R_3, \ \ldots,$$

et les segments déterminés sur la même verticale par les côtés du polygone Π', c'est-à-dire les segments

$$1'\,1' \equiv p_0, \quad 2'2' \equiv p_1, \quad 3'3' \equiv p_2, \quad 4'4' \equiv p_3, \ \ldots$$

de (P) sont respectivement égaux à

$$\frac{nh_1}{m\,\Delta y_0} R_1, \quad \frac{nh_2}{m\,\Delta y_1} R_2, \quad \frac{nh_3}{m\,\Delta y_2} R_3, \quad \frac{nh_4}{m\,\Delta y_3} R_4, \ \ldots;$$

par conséquent, se rappelant la formule (1), on a

$$P_0 = \frac{m}{n}(p_0 - q_0), \quad P_1 = \frac{m}{n}(p_1 - q_1), \quad P_2 = \frac{m}{n}(p_2 - q_2), \ \ldots$$

Si donc, sur une droite (υ) (*fig.* 4), on prend un segment NN égal n fois à un segment arbitraire λ, et des segments consécutifs

$$00 \equiv \upsilon_0, \quad 11 \equiv \upsilon_1, \quad 22 \equiv \upsilon_2, \ \ldots,$$

respectivement égaux aux différences

$$p_0 - q_0, \quad p_1 - q_1, \quad p_2 - q_2, \ \ldots,$$

différences que l'on déduit facilement de la ponctuelle (P); si, sur une autre droite (υ_1), parallèle à (υ), on prend un segment $MM = m\lambda$; et si, du point S commun aux droites MN, MN, on fait la projection de la ponctuelle (υ) sur (υ_1), on trouvera que les segments

$$0_1 0_1, \quad 1_1 1_1, \quad 2_1 2_1, \ \ldots$$

de (υ_1) sont respectivement égaux aux poussées cherchées

$$P_0, \quad P_1, \quad P, \ \ldots$$

correspondant aux points $j_0, j_1, j_2, \ldots$ de l'intrados.

CONSTRUCTION DES POUSSÉES P MOYENNANT LA FORMULE (2)

$$P_i \, \Delta y_i = (z_i + z_{i+1}) \, \Delta z_i.$$

6. Sur les rayons 0, 1, 2, ... du faisceau a (du polygone des forces) comme diamètres, on décrit des demi-cercles et l'on prend les segments $h_0, h_1, h_2, \ldots$ (*fig.* 5); on construit ensuite les segments z_i de manière que

$$z_i^2 = h_i \times i = h_i R_i,$$

c'est-à-dire que z_i soit moyenne géométrique entre h_i et R_i.

Ou autrement : on prend (*fig.* 6) sur une droite, à partir d'une origine z, des segments $z0, z1, z2, z3, \ldots$ égaux aux rayons correspondants R_0, R_1, R_2, R_3, ... du faisceau a, et l'on décrit les demi-cercles sur ces segments zi; sur la même droite, et à partir de la même origine, on prend les segments $z0'$, $z1'$, $z2'$, ... égaux à

$h_0, h_1, h_2, \ldots,$ et l'on forme le faisceau z (0_1 1_1 2_1 ...) dont les rayons z_i soient moyennes géométriques entre h_i et R_i.

Sur une horizontale (Δ), à partir d'une origine a (*fig.* 7), prenons les segments

$$\begin{aligned} a0 &= m\Delta y_0, \\ a1 &= m\Delta y_1, \\ a2 &= m\Delta y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

m étant un nombre entier et positif [1], et tirons les verticales par les points 0, 1, 2, ...; et sur la verticale passant par a, des deux côtés de a, prenons des segments

$$\begin{aligned} a0 &= a0' = nz_0, \\ a1 &= a1' = nz_1, \\ a2 &= a2' = nz_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

n étant un nombre entier et positif [2].

Alors on a sur cette verticale les segments

$$i.i+1 = n(z_{i+1} - z_i) = n\Delta z_i,$$

et

$$i.i'+1 = n(z_i + z_{i+1}).$$

Sur une horizontale (Z), à partir d'une origine Z (*fig.* 7), prenons les segments

$$\begin{aligned} z0 &= 01' = n(z_0 + z_1), \\ z1 &= 12' = n(z_1 + z_2), \\ z2 &= 23' = n(z_2 + z_3), \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par les points 0, 1, 2, ... extrémités de ces segments Zi, tirons les verticales.

---

(1) Dans notre *fig.* 7, $m = 10$.

(2) Dans notre *fig.* 7, $n = 2$. Dans les deux constructions indiquées au commencement de ce numéro, on pourrait prendre, au lieu des segments $= h_i$, des segments $= n^2 h_i$; on aurait alors, au lieu des segments $z_i \left(= \sqrt{h_i R_i}\right)$, les segments z'_i $(= n z_i)$; et ici il suffirait de prendre $a0 = a0' = z'_i$. Les *fig.* 5 et 6 en seraient peut être plus claires.

Formons (*fig.* 7) le polygone $\Sigma \equiv 00123\ldots$, comme au n° 4; et, comme au n° 4, déduisons de celui-ci le polygone $\Pi \equiv 00123\ldots$.

Les côtés du polygone Π interceptent sur la verticale passant par Z les segments

$$i.i+1 = \frac{(z_i + z_{i+1})\,\Delta z_1}{m\,\Delta y_i} = \frac{n^2}{m}\,P_i.$$

Donc, avec la construction de la *fig.* 4, où cependant on prendra $\overline{NN} = n^2\lambda$ (λ étant un segment arbitraire) et $\overline{MM} = m\overline{NN}$, on déduit les poussées P_i correspondant aux points j_i de l'intrados ([1]).

7. La construction des P_i avec la formule (2) ne présentant aucune difficulté et pouvant se déduire facilement de ce qui précède, je pense pouvoir me passer d'en faire la description.

CONSTRUCTION DE LA COURBE.

8. Lorsque les P_i sont déterminés, on fixe leurs points d'application M_i sur $\overline{AB}$ de la manière suivante.

On tire par a dans le polygone des forces l'horizontale (α), et, à partir du point a on porte les segments (*fig* 2)

$$a0 = P_0, \quad a1 = P_1, \quad a2 = P_2, \quad \ldots .$$

De l'extrémité b_i du $i^{\text{ième}}$ rayon ($= R_i$) du faisceau a, on tire la droite $b_i i$, et, du point correspondant j_i de l'intrados (*voir* n° 2 et *fig.* 1 et 2), on tire la parallèle à $b_i i$ jusqu'à sa rencontre en m_i avec la R_i correspondante.

La projection horizontale M_i de m_i (*fig.* 1) sur l'axe de symétrie $\overline{AB}$ est le point d'application de la poussée P_i qui donne lieu à une courbe des pressions tangente au point j_i à l'intrados.

Si donc on porte les segments $P_i = ai$ (*fig.* 2) en direction horizontale et à partir de M_i (*fig.* 1), les extrémités P_i de ces segments appartiennent à la courbe transcendante cherchée.

([1]) Cette construction n'est pas effectuée dans nos figures.

OBSERVATIONS.

9. Des procédés tout à fait analogues s'appliquent à la détermination des poussées qui engendrent des courbes des pressions tangentes à l'extrados, au lieu de l'être à l'intrados, et à la construction de la courbe représentative correspondante.

10. Il n'est pas inutile peut-être de rappeler ici une remarque pratique de M. Culmann sur la construction des polygones funiculaires en général.

Je reproduis les paroles de l'illustre savant de Zurich (1) : « Avant de conclure, nous ferons observer que les figures (*analogues aux fig.* 3 *et* 7) deviendraient très-compliquées et presque indéchiffrables, si l'on prolongeait de côté et d'autre tous les côtés des polygones (*funiculaires*). Il suffit complétement de tracer les côtés *entre* les verticales correspondantes et de marquer leurs points d'intersection avec la ligne » verticale (H) où (P) de la *fig.* 3.

« Nous recommandons aussi de faire bien attention à notre notation... » ; c'est celle que j'ai adoptée dans les *fig.* 3 et 7.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 28.

FIN DU TOME QUATRIÈME.