BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur une configuration remarquable dans l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 3-16

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__3_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE CONFIGURATION REMARQUABLE DANS L'ESPACE;

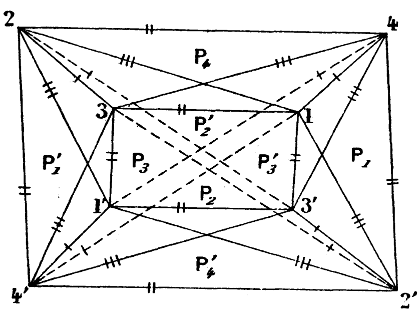
Par M. G. Fontené.

I.

1. Définition d'un octuple gauche complet. — Les trois couples de sommets d'un quadrilatère complet sont trois couples de points tels que la droite joignant un point du premier couple à un point du deuxième couple passe par un point du troisième couple; le nombre de ces droites est 2×2. La figure corrélative, en géométrie plane, est le quadrangle avec ses trois couples de côtés. L'extension à l'espace va donner une figure qui est sa propre corrélative.

(Le lecteur fera bien de se familiariser immédiatement avec la figure 1, où l'on voit nettement deux quadrangles situés dans les

Fig. 1.



plans P_4 et P'_4, deux autres dans les plans P_1 et P'_1, et, avec un peu d'attention, deux encore dans les plans P_2, P'_2, deux dans les plans P_3, P'_3, d'après les indications du Tableau ci-après. Les deux contours quadrangulaires $4\,2\,4'\,2'$ et $3\,1\,3'\,1$, par exemple, sont des contours gauches.)

Soient dans l'espace quatre couples de points

$$(1\ 1'),\quad (2\ 2'),\quad (3\ 3'),\quad (4\ 4'),$$

tels que le plan déterminé par un point du premier couple, un point du deuxième couple et un point du troisième couple, passe par un point du quatrième couple; le nombre de ces plans est $2 \times 2 \times 2$, *et, si l'un d'eux est* $(1\,2\,3\,4)$, *les sept autres sont* $(1\,2\,3'4')$, ..., $(1'2'3'4')$, *le nombre des accents étant pair.*

Ces plans forment quatre couples :

$$\begin{array}{ll} P_1 = (4\ 1\ 2'3'), & P'_1 = (4'1'2\ 3), \\ P_2 = (4\ 2\ 3'1'), & P'_2 = (4'2'3\ 1), \\ P_3 = (4\ 3\ 1'2'), & P'_3 = (4'3'1\ 2), \\ P_4 = (1\ 2\ 3\ 4), & P'_4 = (1'2'3'4'); \end{array}$$

et, CORRÉLATIVEMENT, *ces quatre couples de plans sont tels que le point commun à trois plans pris dans les trois premiers couples appartient à un plan du quatrième couple :*

$$1 = (P_4 P_1 P'_2 P'_3),\qquad 1' = (P'_4 P'_1 P_2 P_3),\qquad \ldots.$$

Chacun des 8 *plans contient quatre des* 8 *points, et par chacun des* 8 *points passent quatre des* 8 *plans.*

Nous nommerons la figure ainsi définie un OCTUPLE GAUCHE COMPLET.

2. CONDITIONS ET PARAMÈTRES. — *Les* 8 *conditions apparentes imposées aux* 8 *points par l'existence des* 8 *plans se réduisent à* 7 ; *la figure dépend de paramètres en nombre* $3 \times 8 - 7 = 17$.

En effet, soient donnés trois couples de plans (P_1, P'_1), (P_2, P'_2), (P_3, P'_3) formant un hexaèdre avec ses quatre couples de sommets $(1, 1')(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$; le trièdre P_1, P_2, P_3 aura pour sommet le point 4, et pour arêtes les droites $4\,1'$, $4\,2'$, $4\,3'$. Ces 8 points communs à trois quadriques (P_1, P'_1), ... sont 8 points de Lamé; dès lors, si l'on suppose que les 4 points 1, 2, 3, 4 sont dans un même plan, la même chose a lieu pour les 4 autres. Un raisonnement corrélatif peut être fait en partant d'un octaèdre. On se rappellera que les 8 points du système sont 8 points de Lamé; les 8 plans du système sont de même 8 plans de Lamé.

3. Divers points de vue. — *a. Le couple de plans* (P_4, P'_4) *contient deux quadrangles* 1 2 3 4 *et* 1′2′3′4′, *tels que deux côtés de notations différentes* 2 3 *et* 4′ 1′ *sont dans un même plan, et coupent par suite en un même point la droite d'intersection des deux plans; on a ainsi les* 8 *plans* P.

Si l'on se donne les plans P_4 et P'_4, avec le quadrangle 1 2 3 4, et si, par les points P_1, P_2, P_3 où les droites 4 1, 4 2, 4 3 rencontrent l'arête du dièdre, on mène 3 droites dans le plan P'_4, de manière à former le triangle 1′2′3′, on peut démontrer directement ceci : P'_1, P'_2, P'_3 étant les points où les côtés du triangle 1 2 3 rencontrent l'arête du dièdre, les trois droites qui joignent respectivement ces points aux points 1′, 2′, 3′ concourent en un même point 4′; il y a là une condition remplie d'elle-même. (Les notations P_1, P_2, ..., qui représentent réellement des plans, ont été employées ici pour représenter les sommets d'angles contenus dans ces plans.)

b. Si l'on partage les 8 points en 2 couples, de manière que chaque couple renferme les 4 indices et un nombre impair d'accents, on obtient *deux tétraèdres dont chacun est inscrit à l'autre :* tels sont les tétraèdres 1′2 3 4 et 1 2′3′4′; on a bien les 8 plans P. La figure donne 4 couples de tels tétraèdres. M. G. Humbert, dans un Mémoire inséré au *Bulletin* (t. XXXII, 1904, p. 140-144), a rencontré des couples de tétraèdres dont chacun se trouvait être inscrit à l'autre par la nature de la question étudiée, et il a observé que les 8 sommets et les 8 plans des faces pouvaient se grouper quatre à quatre de trois nouvelles manières pour former deux tétraèdres analogues.

c. On a considéré jusqu'ici les points et les plans du système. Considérons les droites qui joignent 2 points n'appartenant pas à un même couple; ce sont en même temps les droites d'intersection de 2 plans n'appartenant pas à un même couple; leur nombre est $\frac{6 \times 8}{2}$ ou 24, puisque chaque point, par exemple, est joint à 6 autres. *Ces* 24 *droites se partagent en* 3 *groupes de* 8, que nous appellerons les groupes I, II, III, et chaque groupe se subdivise en 2 sous-groupes; les droites du groupe I, par exemple, sont

$$\begin{cases} 4\,1, & 4'\,1', & 2\,3', & 2'\,3, \\ 4\,1', & 4'\,1, & 2\,3, & 2'\,3'. \end{cases}$$

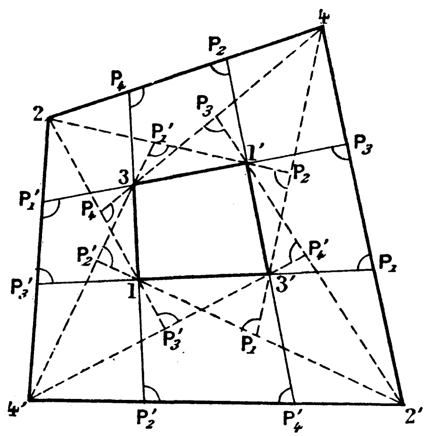
ou

$$\left\{\begin{array}{llll}(P_4, P_1), & (P'_4, P'_1), & (P_2, P'_3), & (P'_2, P_3),\\ (P_2, P_3), & (P'_2, P'_3), & (P_4, P'_1), & (P'_4, P_1).\end{array}\right.$$

Les 8 *droites d'un même groupe sont* 8 *génératrices d'un hyperboloïde,* 4 *d'un système et* 4 *de l'autre;* la droite 4 1 ou (P_4, P_1), par exemple, rencontre les 4 droites 4 1′, 4′ 1, $(P_4 P'_1)$, $(P'_4 P_1)$. Les 8 droites du groupe I (marquées d'un trait sur la figure 1) forment sur un hyperboloïde H_1 deux contours quadrangulaires 4 1 4′ 1′ et 2 3 2′ 3′ ayant pour sommets les 8 points du système; ces mêmes droites forment deux autres contours quadrangulaires dont les plans des angles sont P_4, P_1, P'_4, P'_1 et P_2, P_3, P'_2, P'_3. Chacun des groupes II et III donne des résultats analogues.

Sur la figure 2, où la disposition des 8 points n'est pas la même

Fig. 2.

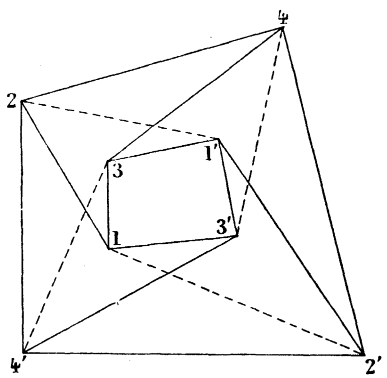


que dans la figure 1 (déplacement des points 1 et 1′), on a représenté seulement les groupes de droites II et III, que l'on aura à combiner plus loin; on voit nettement l'hyperboloïde du groupe II avec les deux contours 4 2 4′ 2′; 3 1 3′ 1′ et les deux contours $P_4 P_2 P'_4 P'_2$, $P_3 P_1 P'_3 P'_1$; l'hyperboloïde du groupe III ne se détache pas, mais les contours 4 3 4′ 3′, 1 2 1′ 2′ et $P_4 P_3 P'_4 P'_3$ $P_1 P_2 P'_1 P'_2$ sont bien visibles (les derniers au centre de la figure).

Les 17 paramètres sont les 9 paramètres de l'hyperboloïde H_2, par exemple, et les 8 paramètres des génératrices. On obtient encore ce nombre de 17 paramètres en observant que les 16 conditions d'intersection des 8 droites du groupe II, par exemple, se réduisent à 15 conditions distinctes ($32 - 15 = 17$); la 16^e condition est remplie d'elle-même.

c'. Chacun des 8 plans P contient, par définition, un quadrangle; le nombre des côtés de ces quadrangles est $\frac{6 \times 8}{2}$ ou 24, chaque côté étant commun à deux quadrangles. Chacun de ces quadrangles emprunte un couple de côtés à chacun des groupes I, II, III, et donne lieu à trois *contours quadrangulaires* en négligeant l'un des couples de côtés. (Corrélativement, chacun des 8 points du système est le sommet d'un angle tétraèdre complet donnant lieu à trois angles tétraèdres ordinaires.)

Fig. 3.



Si le groupe négligé est, par exemple, le groupe I, on a ceci (*fig.* 3) : *Les huit quadrilatères*

$$\begin{array}{cccc} 4\,2\,1\,3, & 4'\,2\,1\,3', & 4'\,2'\,1'\,3', & 4\,2'\,1'\,3; \\ 4\,2\,1'\,3', & 4'\,2\,1'\,3, & 4'\,2'\,1\,3, & 4\,2'\,1\,3' \end{array}$$

sont les faces d'un polyèdre Π_1, *lequel a* 8 *sommets,* 8 *faces,* 16 *arêtes*, *les faces étant groupées quatre par quatre autour de chaque sommet.* Les 8 points et les 8 plans d'un octuple gauche complet sont ainsi les sommets et les plans des faces de trois polyèdres différents de l'espèce indiquée.

(Avec la figure 1, si l'on néglige les droites du groupe III, les 8 faces du polyèdre Π_3 sont les quatre quadrilatères convexes 4 1 3 2, 2 3 1′4′, ..., et les quatre quadrilatères à côtés croisés 4 1′3′2, 2 3′1 4′, ...)

Ces polyèdres à 8 sommets, 8 faces, 16 arêtes, rentrent dans la catégorie des polyèdres homogènes *de genre un* ($F + S = A$), que j'ai considérés en vue de l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet (*Bulletin*, t. XXXII, p. 284). Les polyèdres homogènes de genre *un* comprennent des polyèdres tétragonaux, dont les faces sont des quadrilatères assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet; pour ceux que j'avais indiqués tout d'abord, le nombre des faces est pq, $p \gtreqless 3$, $q \gtreqless 3$. M. Bricard a signalé le premier le polyèdre de la figure 4 (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. IV, p. 554); j'ai ensuite retrouvé ce polyèdre en faisant $p = 4$, $q = 4$ et en supposant que les sommets se confondent deux à deux (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 115; la figure donnée à cet endroit représente un polyèdre identique, comme disposition, au polyèdre Π_3 de la figure 1 dont il est question ci-dessus).

II.

4. Octuples gauches complets, en nombre triplement infini, inscrits a une biquadratique. Couples de points en involution sur une biquadratique; trois séries. — La considération des quadrilatères complets inscrits à une cubique plane introduit pour une telle courbe une correspondance bien connue (*couples steineriens*) et l'on sait avec quelle élégance les fonctions elliptiques expriment la relation entre deux points associés. *Une correspondance analogue s'introduit pour une biquadratique gauche par la considération des octuples complets qui lui sont inscrits;* M. Humbert, dans le Mémoire déjà cité, a rencontré cette correspondance par l'intermédiaire de quadriques que nous retrouverons au paragraphe III, et en considérant, comme il est dit plus haut, des systèmes de deux tétraèdres inscrits l'un dans l'autre : il y a intérêt à établir la correspondance en question sans le secours de ces quadriques. On peut d'ailleurs donner à une telle correspondance le nom d'*involution*, et ces involutions sont au nombre de trois; nous les nommerons à l'occasion $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I}''$, $\mathfrak{I}'''$.

Appelons *biquadratique ponctuelle* la courbe d'intersection de deux quadriques, et *biquadratique tangentielle* la courbe dont les plans osculateurs sont les plans tangents communs à deux quadriques (arête de rebroussement de la développable circonscrite aux deux quadriques); l'une ou l'autre de ces courbes dépend de 16 paramètres. Toute biquadratique ponctuelle qui passe par 7 des 8 points d'un octuple gauche complet passe par le 8ᵉ; il passe donc par ces 8 points des biquadratiques ponctuelles en nombre doublement infini. De même, toute biquadratique tangentielle qui admet pour plans osculateurs, etc.; il existe donc, en nombre doublement infini, des biquadratiques tangentielles admettant pour plans osculateurs les 8 plans d'un octuple gauche complet.

L'ensemble d'un octuple gauche complet et d'une biquadratique circonscrite dépend ainsi de $17 + 2$ ou 19 paramètres. Si l'on se donne la biquadratique (16 paramètres) et un plan (3 paramètres) qui la coupe aux 4 points 1, 2, 3, 4, il existe donc sur la biquadratique 4 autres points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, formant avec les premiers un octuple gauche complet. La question est de savoir si la position du point $1'$ dépend uniquement de la position du point 1. Or, désignons par α l'argument elliptique d'un point de la biquadratique, la représentation paramétrique étant supposée telle que les arguments de quatre points de la courbe, situés dans un même plan, aient une somme nulle; soit ω l'une des trois demi-périodes des fonctions elliptiques introduites. Les arguments des quatre premiers points étant α_1, α_2, ..., si l'on prend

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \omega, \qquad \alpha'_2 = \alpha_2 + \omega, \qquad \ldots,$$

l'hypothèse

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

donne six égalités telles que

$$\alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha_4 \equiv 0 \pmod{2\omega},$$

et une dernière égalité

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 \equiv 0 \pmod{2\omega};$$

réciproquement, même si l'on se borne aux cinq plans

$$(1\ 2\ 3\ 4), \quad (1'\ 2\ 3\ 4'), \quad (1\ 2'\ 3\ 4'), \quad (1\ 2\ 3'\ 4'), \quad (1'\ 2'\ 3'\ 4'),$$

c'est-à-dire si l'on part du plan 1 2 3 4 et du point $4'$ pour déterminer les points $1'$, $2'$, $3'$, et obtenir un plan $1'2'3'$ passant par le point $4'$, on obtient

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \omega, \qquad \ldots.$$

Les arguments des 4 couples de sommets d'un octuple gauche complet inscrit à une biquadratique sont donc α_1 et $\alpha_1 + \omega$, α_2 et $\alpha_2 + \omega$, ..., ce qui démontre le fait annoncé; *deux points associés ont des arguments qui diffèrent de* ω. Les octuples gauches complets inscrits à une biquadratique dépendent de 3 paramètres.

On aurait des faits corrélatifs.

III.

5. Octuples gauches complets, en nombre doublement infini, inscrits a une biquadratique et circonscrits a une quadrique. — Un quadrilatère complet étant inscrit à une cubique plane, si l'on inscrit une conique à ce quadrilatère, il existe une infinité de quadrilatères complets inscrits à la cubique et circonscrits à la conique; le système de la cubique et de la conique dépend de paramètres en nombre $9 + 2 + 1 - 1$ ou 11. On peut se donner la conique, les coordonnées de ses points étant exprimées en fonctions rationnelles d'un paramètre t, et définir les quadrilatères complets par les valeurs que prend le paramètre t aux 4 points de contact, ces valeurs étant fournies par l'équation du quatrième degré

$$f(t) + \lambda\,\varphi(t) = 0,$$

où λ est variable; le nombre des paramètres est $5 + 9 - 3$ ou 11, en raison de la substitution linéaire que l'on peut effectuer sur λ.

La question suivante se pose alors pour l'espace :

Un octuple gauche complet étant inscrit à une biquadratique Ω, *si l'on considère une quadrique* S *tangente aux* 8 *plans de cet octuple, existe-t-il une double infinité d'octuples gauches complets inscrits à la biquadratique et circonscrits à la quadrique?*

Le nombre de paramètres pour le système de la biquadratique et de la quadrique serait $16+3+2-2$, ou 19. *La biquadratique étant donnée, la quadrique dépendrait de* 3 *paramètres.*

6. Une courte digression est ici nécessaire. J'ai donné en 1899 (*Nouvelles Annales,* p. 67) le théorème suivant que j'ai démontré analytiquement :

Étant données deux quadriques S′ *et* S, *pour que les tétraèdres inscrits à* S′ *et circonscrits à* S *dépendent de* 5 *paramètres, au lieu de* 4, *il faut et il suffit que les deux quadriques aient* 4 *génératrices communes* (soient quadritangentes). Si l'on se donne à volonté l'un des sommets du tétraèdre sur l'une des quadriques, et le plan de la face opposée tangent à l'autre quadrique, le tétraèdre dépend encore d'un paramètre. Au début du Mémoire cité plus haut, M. G. Humbert a établi géométriquement le même théorème, et il lui a donné sa portée véritable en observant que, dans les conditions indiquées, de quelque façon que l'on commence et que l'on poursuive la construction d'un tétraèdre inscrit à l'une des quadriques et circonscrit à l'autre, cette construction aboutit toujours : on peut se donner à volonté le sommet D sur l'une des quadriques, le trièdre DA, DB, DC circonscrit à l'autre par les plans de ses faces.

[Klein a montré que la surface de Kummer admet une série cinq fois infinie de tétraèdres à la fois inscrits et circonscrits; or une telle surface peut dégénérer en un système de deux quadriques quadritangentes; le théorème en question est un cas singulier du résultat obtenu par Klein.]

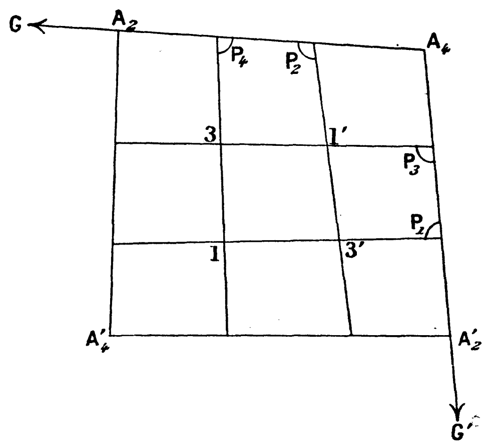
7. Revenons à la question posée plus haut. On peut chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une biquadratique Ω et une quadrique S admettent une double infinité d'octuples gauches complets inscrits à Ω et circonscrits à S; on va voir que *la biquadratique doit passer par les sommets de deux quadrilatères tracés sur la quadrique.*

Pour montrer que la condition est nécessaire, considérons l'un des 8 points communs à Ω et à S, soit A_4, et désignons par G, G′ les deux génératrices de S qui passent par ce point (*fig.* 4). Un plan quelconque mené par G est un plan tangent à S; s'il coupe encore Ω aux points A_2 et 1, 3, il existe donc un octuple gauche complet, inscrit à Ω et circonscrit à S, admettant pour quatre de ses sommets les points A_4, A_2, 1 et 3. Des trois plans

$$(A_4, 1, A'_2, 3'),\quad (A_4, A_2, 3', 1'),\quad (A_4, 3, 1', A'_2),$$

tangents à la quadrique S, le deuxième, par exemple, passe par G comme le plan d'où l'on est parti, les deux autres passant par G';

Fig. 4.



le point A_2 est donc sur G, le point A'_2 sur G'. La biquadratique Ω passe ainsi par les sommets A_4, A_2, A'_4, A'_2 d'un quadrilatère tracé sur la quadrique S. Elle passe encore par les sommets d'un second quadrilatère $A_3 A_1 A'_3 A'_1$ analogue au premier. On remarquera que les 8 points A sont les sommets d'un octuple gauche très particulier, inscrit à Ω et circonscrit à S.

Réciproquement, soit une biquadratique Ω qui passe par les sommets A de deux quadrilatères tracés sur une quadrique S; nous supposerons que le point A_i est le point i de la figure 3, où l'on négligera les lignes pointillées. La quadrique S' menée par Ω et par la corde 4 2 contient les cordes 3 1 et 3' 1' qui s'appuient sur 4 2, et aussi la corde 4' 2' qui s'appuie sur 3 1 : cette quadrique contient donc le contour quadrangulaire $P_4 P_2 P'_4 P'_2$ tracé sur S; une autre quadrique S'' menée par Ω contient le contour quadrangulaire $P_3 P_1 P'_3 P'_1$; *la biquadratique Ω est ainsi l'intersection de deux* *quadriques, S' et S'', quadritangentes à* S. Si l'on mène à S un plan tangent *quelconque,* on voit aisément, par le théorème du n° 6, que ce plan fournit un octuple gauche complet inscrit à Ω et circonscrit à S.

Le raisonnement précédent appartient pour le fond à M. Humbert; ce géomètre, après avoir établi le théorème du n° 6, s'est proposé de rechercher à quelles conditions une biquadratique Ω et une quadrique S admettent une double infinité de *tétraèdres* inscrits à Ω et circonscrits à S; il a trouvé la condition énoncée ci-dessus, et introduit à ce propos les couples de tétraèdres mentionnés précédemment.

Le nombre de paramètres dont dépend ici le système de la quadrique et de la biquadratique est $9 + 8 + 2$ ou 19. Comme c'est le nombre de paramètres indiqué à la fin du n° 5, il y a tout lieu de croire que la question posée dans ce numéro se résout par l'affirmative.

[Le théorème rappelé au début du n° 6 donne cette conséquence : Étant données deux quadriques quelconques S' et S, si l'on considère les tétraèdres en nombre doublement infini qui sont inscrits à S' et circonscrits à S, l'un des sommets étant donné sur S', le plan de la face opposée passe par un point fixe; si l'on considère en effet le cône qui a pour sommet le point donné et qui est circonscrit à S, il existe une quadrique S_0 inscrite à ce cône et quadritangente à S', et le plan dont il s'agit est tangent à la quadrique S_0; ce plan dépend d'un paramètre, et, quand on l'a choisi, on obtient une infinité simple de tétraèdres répondant à la question. En ce qui concerne la biquadratique Ω et la quadrique S, si l'on se donne sur Ω le sommet 1' du tétraèdre 1' 2 3 4, ce tétraèdre dépend encore d'un paramètre, et le plan de la face 2 3 4 passe par un point fixe, le point 1 : ce fait se comprend bien d'après ce qui précède, en considérant une quadrique passant par Ω, à l'exception des deux quadriques S' et S'' qui sont quadritangentes à S.]

IV.

8. Tétraèdres en nombre simplement infini, inscrits a une biquadratique ponctuelle, et dont les plans des faces sont osculateurs a une biquadratique tangentielle. — La condition

donnée au paragraphe III, pour qu'une biquadratique Ω et une quadrique S admettent une double infinité d'octuples gauches complets inscrits à Ω et circonscrits à S, peut, comme on l'a vu au cours de la démonstration, s'énoncer ainsi : il faut et il suffit que l'on puisse faire passer par la biquadratique deux quadriques S' et S'' quadritangentes à S. M. Humbert, qui considère dans son Mémoire deux tétraèdres (par analogie avec les triangles de Poncelet), indique en terminant le théorème suivant :

Pour qu'il existe une série *simplement infinie* de tétraèdres inscrits à une quadrique S' et circonscrits à la fois aux quadriques S_1 et S_2, il *suffit* que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par S_1 et S_2, il y en ait une qui soit quadritangente à S'; le lieu des sommets de ces tétraèdres est une biquadratique tracée sur S'. *On a ainsi une série simplement infinie de tétraèdres inscrits à une biquadratiqne ponctuelle* π, *et dont les plans des faces sont osculateurs à une biquadratique tangentielle* τ. Et il y aurait à rechercher si, à toute quadrique passant par π, correspond une quadrique tangente aux plans osculateurs de τ, par la condition que ces deux quadriques soient quadritangentes; cela n'est pas certain, la condition ci-dessus n'étant pas donnée comme nécessaire.

V.

9. Octuples gauches complets inscrits a une quadrique et circonscrits a une autre. — Le problème de construire un octuple gauche complet, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S', est un problème triplement indéterminé en apparence : un octuple gauche dépend en effet de 17 paramètres, et on l'astreint à 14 conditions seulement, les 8 points d'un octuple formant un système de points de Lamé, ses 8 plans formant un système de plans de Lamé. J'ai déjà rencontré ce problème à un autre point de vue. On a remarqué, à la fin du paragraphe I, que les 8 points et les 8 plans d'un octuple gauche complet sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre Π qui rentre dans la catégorie des polyèdres tétragonaux de genre *un* (*fig.* 3); et j'ai montré (*Bulletin,* t. XXXIII, p. 118) que le problème de construire un polyèdre Π, circonscrit à une

quadrique S et inscrit à une quadrique S′, *est très probablement un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé;* s'il en est bien ainsi, la condition d'indétermination est que les racines du discriminant de la forme $kS + S'$, soit

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \theta' k + \delta',$$

vérifient la relation

$$d + a = b + c.$$

J'ai rencontré cette même condition pour un autre problème (*Nouvelles Annales,* 1905, p. 119). J'ai alors été conduit à remarquer que, si elle est satisfaite pour deux quadriques S et S′, elle l'est encore lorsque l'on remplace la quadrique S′ par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel déterminé par S et S′, ou la quadrique S par une quadrique quelconque du faisceau tangentiel déterminé par S et S′. J'ai également été conduit, en traitant ce nouveau problème, au résultat suivant : la racine carrée du polynome

$$\delta + \theta h + \varphi h^2 + \theta' h^3 + \delta' h^4$$

étant

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \ldots,$$

la condition ci-dessus est simplement

$$D = 0.$$

NOTE I.

En ce qui concerne les trois involutions $\mathfrak{J}$ sur une biquadratique, d'après les formules

$$\alpha' = \alpha + \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

j'indiquerai les faits suivants, qui ne sont d'ailleurs pas des faits nouveaux.

Considérons les couples de points de la biquadratique dont les arguments elliptiques satisfont à l'une des relations

$$m + n' = \omega_1, \qquad m + n'' = \omega_2, \qquad m + n''' = \omega_3, \qquad m + n = 0,$$

le double de chacune des quantités ω_1, ω_2, ω_3, o étant de la forme $2h\omega_1 + 2k\omega_2$, les choses étant d'ailleurs telles que 4 points coplanaires de la biquadratique aient des arguments de somme nulle.

Si l'on prend, par exemple, la première relation, deux couples, m, n' et $\overline{m}$, $\overline{n'}$, sont dans un même plan, puisque la somme des 4 arguments est nulle, à une période près, de sorte que les cordes mn' et $\overline{m}\,\overline{n'}$ se coupent en un point A; une troisième corde du même système doit rencontrer chacune des deux premières, et par suite passer en A. Les cordes mn' sont donc les génératrices du cône de sommet A qui passe par la biquadratique, et l'on a de même les génératrices des 3 autres cônes (sommets B, C, D) qui passent par cette courbe. Si l'on mène alors par DA un plan sécant qui coupe la courbe aux points m, m', n, n', les cordes mn et $m'n'$ passent en D, les cordes mn' et $m'n$ passent en A, et l'on a

$$\begin{cases} m + n = 0, \\ m' + n' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m + n' = \omega_1, \\ m' + n = \omega_1. \end{cases}$$

On a donc

$$m' = m + \omega_1, \qquad n' = n + \omega_1,$$

de sorte que, dans le quadrilatère $m\,n\,m'\,n'$, *deux sommets opposés m et m', ou n et n', se correspondent dans l'involution $\mathfrak{I}'$*. Un plan sécant mené par BC donnerait le même résultat. Les cordes telles que mm' rencontrent DA et BC.

En second lieu, si ab est une corde fixe de la biquadratique, prise arbitrairement, *il y a involution entre les plans abm et abm'*; car un plan mené par ab donne les points m et μ avec les arguments m et $-a-b-m$, et les points associés m' et μ' ont pour arguments

$$m + \omega_1 \qquad \text{et} \qquad -a-b-m+\omega_1,$$

de sorte que les plans abm' et $ab\mu'$ sont identiques.

NOTE II.

Si l'on voulait représenter sur une figure les 24 droites dont il est question au nº 3, on pourrait dessiner les 8 droites qui sont en trait plein sur la figure 2, mettre $P_1, P_2, \ldots, P'_1, P'_2, \ldots$ là où il y a $1, 2, \ldots, 1', 2', \ldots$, et inversement, puis dessiner les 16 droites qui portent les derniers côtés des quadrangles $1\,2\,3\,4$, $1'\,2'\,3'\,4'$, $4\,2\,1'\,3'$, $4'\,2'\,1\,3$.