Bulletin de la S. M. F.

Hadamard

Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 48-52

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__48_0>

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. Hadamard.

Beudon ([1]) est parvenu à étendre au cas d'une équation aux dérivées partielles, à un nombre quelconque de variables indépendantes, la notion de *caractéristique*.

J'ai pu obtenir le même résultat ([2]) relativement aux systèmes de p équations à p fonctions inconnues qui satisfont à la condition postulée par Cauchy et Mme Kowalewski dans la démonstration de leur célèbre théorème fondamental, c'est-à-dire qui sont résolubles par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé des inconnues relativement à une même variable indépendante.

Mais on sait aujourd'hui que le cas où la condition précédente peut être réalisée est loin d'être entièrement général. M. Bourlet ([3]) a indiqué des systèmes qui, *par aucun changement de variables indépendantes,* ne peuvent être ramenés à la forme de Mme Kowalewski.

Il est à remarquer qu'on n'a point besoin de recourir à des systèmes formés *ad hoc* pour rencontrer cette circonstance singulière : elle se présente dans l'un des plus connus et des plus importants que la Géométrie moderne ait eu à considérer : je veux parler des équations de la *déformation des surfaces*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\mathrm{E}(u,v),\\ &\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\mathrm{F}(u,v),\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\mathrm{G}(u,v). \end{aligned}\right.$$

Il est visible que de telles équations ne sont pas résolubles par

---

([1]) Ce *Bulletin,* année 1897, p. 108-120.

([2]) *Leçons sur la propagation des ondes,* Chap. VII.

([3]) Thèse (*Annales de l'École normale supérieure,* suppl., 1891).

rapport à $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$; et il est non moins évident qu'elles ne sauraient le devenir par un changement de variables indépendantes, puisque ce changement n'altère que la forme des seconds membres et non celle des premiers.

MM. Méray et Riquier d'une part, M. Delassus de l'autre, ont appris à trouver les conditions d'existence des intégrales, non seulement pour les systèmes dont je viens de parler, mais aussi pour ceux où le nombre des inconnues n'est pas égal à celui des équations. En reprenant leurs travaux pour y étudier de plus près l'influence des changements de variables, on parviendrait évidemment à une théorie entièrement générale des caractéristiques.

Beudon a fait un premier pas dans cette voie ([1]), en ce qui regarde les systèmes de plusieurs équations à *une seule* fonction inconnue.

Nous resterons, au contraire, dans l'hypothèse où le nombre des équations et celui des inconnues sont égaux entre eux, et donnerons quelques indications sur la manière dont interviennent les caractéristiques dans cette hypothèse.

Soit, par exemple, avec les notations de l'Ouvrage cité ([2]), le système de trois équations de second ordre

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i,k} a_{ik}p_{ik}+\sum b_{ik}q_{ik}+\sum c_{ik}r_{ik}+l=0,\\ &\sum a'_{ik}p_{ik}+\sum b'_{ik}q_{ik}+\sum c'_{ik}r_{ik}+l'=0,\\ &\sum a''_{ik}p_{ik}+\sum b''_{ik}q_{ik}+\sum c''_{ik}r_{ik}+l''=0,\end{aligned}\right.$$

aux trois fonctions inconnues u, v, w et linéaires par rapport aux dérivées secondes ([3]). Les variables indépendantes sont x_1, x_2, ..., x_n.

Si l'on se donne les valeurs de u, v, w et de leurs dérivées premières sur la multiplicité

$$(3)\qquad x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

([1]) *Annales de l'École normale supérieure*, 1896.

([2]) *Leçons sur la propagation des ondes*, Chap. VII, § I.

([3]) On sait que cette hypothèse ne restreint pas la généralité.

les dérivées secondes p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} sont fournies par les équations (¹)

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A p_{nn} + B q_{nn} + C r_{nn} + K &= 0,\\ A' p_{nn} + B' q_{nn} + C' r_{nn} + K' &= 0,\\ A'' p_{nn} + B'' q_{nn} + C'' r_{nn} + K'' &= 0,\end{aligned}\right.$$

avec

$$A = \sum a_{ik} P_i P_k, \qquad P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad P_n = -1$$

et des expressions analogues pour B, ...

Lorsque le système donné est susceptible d'être mis sous la forme de Mme Kowalewski, la condition pour que la multiplicité (3) soit caractéristique est donnée par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(5)\qquad H = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si elle est vérifiée, sans que tous les mineurs de H soient nuls, les équations (4) (si elles sont compatibles) ne déterminent plus entièrement p_{nn}, q_{nn}, r_{nn} : ces quantités dépendent encore d'un paramètre inconnu ρ. Mais la considération des dérivées troisièmes montre que ce paramètre doit vérifier, sur la multiplicité (3), l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{n=1} \frac{d\rho}{dx_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} - N = 0,$$

qui lie entre elles les valeurs de ρ sur chacune des lignes (*bicaractéristiques*) définies par les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial H}{\partial P_1}\right)} = \frac{dx_2}{\left(\frac{\partial H}{\partial P_2}\right)} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{\left(\frac{\partial H}{\partial P_{n-1}}\right)}.$$

Moyennant cette équation (6), les dérivées troisièmes deviennent à leur tour indéterminées et dépendent, à leur tour, d'un para-

(¹) *Loc. cit.*, p. 277.

mètre arbitraire ρ_1, assujetti à l'équation différentielle

$$\sum_{i=1}^{n=1} \frac{d\rho_1}{dx_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} + N_1 = 0 \tag{6'}$$

et ainsi de suite.

N est (en général) quadratique en ρ. Mais N_1 est linéaire en ρ_1 et, de même, les équations analogues servant à calculer les dérivées suivantes sont linéaires par rapport aux inconnues qu'elles doivent déterminer. De plus, le coefficient de ces inconnues est chaque fois le même, savoir

$$\frac{\partial N}{\partial \rho}.$$

Cela posé, passons aux systèmes qui *ne peuvent pas* être mis sous la forme de M^{me} Kowalewski.

Ces systèmes sont caractérisés par cette circonstance que l'équation $H = 0$ *est une identité.*

S'il en est ainsi, sur chaque multiplicité (3), les équations (4) forment un système indéterminé : leur solution dépend (en général) d'un paramètre ρ, qui satisfait encore à l'équation (6). Mais ici cette équation est une équation *en termes finis,* savoir une équation quadratique $N = 0$.

Cette équation, une fois résolue, l'équation en ρ_1, savoir l'équation (6′), ainsi que toutes les équations analogues suivantes, sont également en termes finis et même du premier degré.

En un mot, ici, comme dans le cas où H n'était pas identiquement nul, les dérivées successives des inconnues sont déterminées d'une manière parfaitement univoque.

La condition pour qu'il n'en soit plus ainsi est

$$\frac{\partial N}{\partial \rho} = 0,$$

autrement dit que l'équation $N = 0$ ait une racine double.

C'est cette condition qui définit les caractéristiques.

Il resterait, bien entendu, à rechercher (en la supposant vérifiée) ce qu'on doit entendre par *bicaractéristiques.*

Si, par exemple, on applique ceci aux systèmes (1), on trouve que les caractéristiques de ce système ne sont autres que les lignes asymptotiques des surfaces correspondantes.

C'est bien le résultat que l'on obtient dans l'étude du problème de la déformation, mais cet énoncé n'avait jusqu'ici de sens que grâce à la réduction du système à une équation unique.