BULLETIN DE LA S. M. F.

PETROVITCH

# Sur certaines transcendantes entières

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 34 (1906), p. 165-177
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__165_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

## SUR CERTAINES TRANSCENDANTES ENTIÈRES;

Par M. Michel Petrovitch.

**1.** Il y a un nombre illimité de séries

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

dont le coefficient général $a_n$ se laisse mettre sous la forme

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_a^b u(t)[r(t)]^n \, dt, \tag{2}$$

où les limites $a$ et $b$ de l'intégrale sont réelles, les fonctions $u(t)$ et $r(t)$ réelles, limitées et d'un signe invariable lorsque $t$ varie entre $a$ et $b$.

Nous appellerons les fonctions, définies par de telles séries, *transcendantes* $\Delta(z)$.

Dans le cas le plus simple où $r(t)$ se réduit à une constante, la transcendante $\Delta(z)$ se réduit à une fonction exponentielle

$$\Delta(z) = A e^{\alpha z}.$$

Lorsque $r(t)$ est une véritable fonction de $t$, le développement (1) engendre une infinité de transcendantes variées. Ainsi, au cas où

$$r(t) = ht, \qquad h = \text{const.}$$

correspond une fonction de la forme

$$\Delta(z) = A \frac{e^{\beta z} - e^{\alpha z}}{z},$$

A, $\alpha$, $\beta$ étant des constantes réelles ; au coefficient

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t}\right)^n dt$$

correspond la trancendante

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}};$$

au coefficient

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{2e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{\pi}} e^{\,n\beta t^2} \, dt$$

$(\alpha > 0, \beta > 0)$ correspond

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!\sqrt{\alpha + n\beta}}.$$

**2.** De l'expression (2) on tire

$$(3) \qquad \Delta(z) = \int_a^b u(t) e^{zr(t)}\,dt,$$

$$(4) \qquad \Delta^{(k)}(z) = \int_a^b u(t)[r(t)]^k e^{zr(t)}\,dt,$$

d'où l'on conclut que *la dérivée d'un ordre quelconque d'une transcendante* $\Delta(z)$ *est elle-même une transcendante* $\Delta(z)$.

De même, l'expression

$$(5) \qquad \int \Delta(z)\,dz = \int_a^b \frac{u(t)}{r(t)} e^{zr(t)}\,dt + \text{const.}$$

fait voir que : *lorsque la fonction correspondante* $r(t)$ *ne s'annule pas pour les valeurs de* $t$ *comprises entre* $a$ *et* $b$, *ni pour ces mêmes valeurs, l'intégrale* $\int \Delta(z)dz$ *est, à une constante près, également une transcendante* $\Delta(z)$.

De (2) on conclut qu'en valeur absolue

$$a_n \leqq a_0 \frac{M^n}{n!},$$

M étant la plus grande valeur absolue de $r(t)$ pour les valeurs de $t$ comprises entre $a$ et $b$. Par suite : *toute transcendante* $\Delta(z)$ *est une fonction entière de genre inférieur à deux.*

Les expressions (3) et (4) mettent en évidence de nombreuses particularités des transcendantes $\Delta(z)$, dont nous ne citerons ici que les suivantes :

Pour toute valeur réelle ou imaginaire de $z$ le module de $\Delta(z)$ est inférieur à celui de

$$a_0 e^{Mz},$$

et le module de $\Delta^{(k)}(z)$ inférieur à celui de

$$a_k e^{Mz}.$$

L'élément de l'intégrale (3) gardant un signe invariable pour toute valeur réelle de $z$, et ainsi l'élément de la première intégrale qui figure dans l'expression

$$\Delta(\alpha+\beta i)=\int_a^b ue^{\alpha r}\cos\beta r\,dt+i\int_a^b ue^{\alpha r}\sin\beta r\,dt,$$

gardant un signe invariable pour toute valeur de $\beta$ comprise entre $-\frac{\pi}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$, on conclut qu'une transcendante $\Delta(z)$ (et par suite sa dérivée d'un ordre quelconque) ne peut avoir aucun zéro réel, ni aucun zéro imaginaire à coefficient de $i$ compris entre $-\frac{\pi}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$.

Chacune des courbes réelles

$$y=\Delta(x),\qquad y=\Delta'(x),\qquad y=\Delta''(x),\qquad \ldots$$

varie constamment dans un même sens, sans présenter de maxima, de minima ou de points d'inflexion ; de plus, on aura pour les valeurs positives de $x$ et de $\alpha$

$$\Delta(x+\alpha)\leqq e^{M\alpha}\Delta(x),\qquad \Delta(x+\alpha)\leqq\Delta(\alpha)e^{Mx},$$
$$\Delta^{(k)}(x+\alpha)\leqq M^k e^{M\alpha}\Delta(x),\qquad \Delta(x+\alpha)\leqq M^k\Delta(\alpha)e^{Mx}.$$

Si N est la plus petite valeur de $r(t)$ entre $a$ et $b$, on aura

$$\Delta(x)\geqq a_0 e^{Nx},$$
$$\Delta(x+\alpha)\geqq e^{N\alpha}\Delta(x),\qquad \Delta(x+\alpha)\geqq\Delta(\alpha)e^{Nx},$$

avec des inégalités analogues pour les dérivées.

Lorsque $z$ augmente indéfiniment dans une direction quelconque à droite de l'axe des imaginaires, la fonction $\Delta(z)$ augmentera indéfiniment ou bien tendra vers zéro suivant que $r(t)$ est positive ou négative dans l'intervalle $(a, b)$.

De même, lorsque $z$ augmente indéfiniment dans une direction quelconque à gauche de l'axe des imaginaires, $\Delta(z)$ augmentera indéfiniment ou bien tendra vers zéro suivant que $r(t)$ est négative ou positive dans $(a, b)$.

En tous cas, donc, la courbe

$$y=\Delta(x)$$

(ainsi que les courbes dérivées) a l'axe des $x$ comme asymptote, et s'en approche indéfiniment à droite ou à gauche de l'axe des $y$, suivant le signe de $r(t)$.

Les inégalités précédentes fournissent aussi des limites supérieures ou inférieures pour les valeurs asymptotiques de $\Delta(x)$ dans le cas de $x$ très grand : celles-ci sont fournies par des exponentielles

$$\mathrm{A}e^{hx},$$

où A et $h$ sont des constantes.

Dans le cas plus particulier où la fonction $r(t)$ présente un maximum entre $a$ et $b$, la formule classique de Laplace fournit comme valeur asymptotique précise de $\Delta(x)$ l'expression

$$\mathrm{C}\frac{e^{hx}}{\sqrt{x}},$$

où les constantes C et $h$ ont pour valeurs

$$\mathrm{C} = u(\alpha)\sqrt{-\frac{2\pi}{r''(\alpha)}}, \qquad h = r(\alpha),$$

$\alpha$ étant la valeur de $t$ pour laquelle $r(t)$ atteint son maximum.

Pour avoir l'expression analogue correspondant à la dérivée $\Delta^{(k)}(x)$, il suffit de changer dans C $u(\alpha)$ en

$$u(\alpha)[r(\alpha)]^k.$$

Parmi les nombreuses propriétés qu'on peut tirer des expressions précédentes, citons encore la suivante :

*Les équations linéaires à coefficients constants et à second membre, celui-ci étant une transcendante* $\Delta(z)$, *sont en général intégrables à l'aide des transcendantes* $\Delta(z)$ : l'équation

$$\mathrm{A}_0\frac{d^py}{dx^p} + \mathrm{A}_1\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \ldots + \mathrm{A}_p y = \int_a^b u(t)e^{xr(t)}\,dt$$

admet comme intégrale particulière

$$\Delta(x) = \int_a^b \mathrm{U}(t)e^{xr(t)}\,dt,$$

avec

$$U(t) = \frac{u(t)}{A^0[r(t)]^p + A_1[r(t)]^{p-1} + \ldots + A_p},$$

sous la condition que l'équation algébrique caractéristique

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = 0$$

n'ait aucune racine réelle comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $r(t)$ quand $t$ varie de $a$ à $b$.

3. *On a ainsi une classe assez étendue de fonctions entières de genre zéro ou un, à nombreuses particularités connues.*

Appliquons ce qui précède à la transcendante

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

laquelle, comme on le verra dans ce qui suit, présente un intérêt tout particulier.

On a ici

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t}\right)^n dt,$$

et par suite

$$\Delta(z) = \int_0^1 e^{zt \log \frac{1}{t}} dt,$$

La fonction correspondante,

$$r(t) = t \log \frac{1}{t},$$

part de la valeur o pour $t = 0$, croît jusqu'à son maximum

$$M = \frac{1}{e},$$

à partir duquel elle décroît en atteignant la valeur o pour $t = 1$. Par suite la fonction $\Delta(z)$ présentera les particularités suivantes :

Pour toute valeur réelle ou imaginaire de $z$ le module de $\Delta(z)$ est inférieur à celui de $e^{\frac{z}{e}}$ et le module de $\Delta^{(k)}(z)$ inférieur à celui de

$$\frac{1}{(k+1)^{k+1}} e^{\frac{z}{e}}.$$

Pour les valeurs réelles et positives de $z$ et de $\alpha$, on a

$$\Delta(z+\alpha) \leqq e^{e^{\frac{\alpha}{e}}} \Delta(z), \qquad \Delta(z+\alpha) \leqq \Delta(\alpha) e^{e^{\frac{z}{e}}},$$

$$\Delta^{(k)}(z+\alpha) \leqq e^{e^{\frac{\alpha}{e}}-k} \Delta(z), \qquad \Delta^{(k)}(z+\alpha) \leqq \Delta(\alpha) e^{e^{\frac{z}{e}}-k}.$$

La fonction $\Delta(z)$ et toutes ses dérivées n'ont aucun zéro réel ni aucun zéro imaginaire à coefficient de $i$ compris entre $-\pi e$ et $\pi e$. Ces fonctions tendent vers zéro ou augmentent indéfiniment suivant que $z$ augmente indéfiniment dans une direction à gauche ou bien à droite de l'axe des imaginaires.

La valeur asymptotique de $\Delta(z)$, pour $z$ positif et très grand, est donnée par l'expression

$$\sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{e^{\frac{z}{e}}}}{\sqrt{z}};$$

celle de la dérivée $\Delta^{(k)}(z)$ par l'expression

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{k+\frac{1}{2}}} \frac{e^{e^{\frac{z}{e}}}}{\sqrt{z}}.$$

On peut avoir une limite inférieure de $\Delta(z)$ pour les valeurs réelles et positives de $z$ en remarquant qu'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{n!},$$

d'où l'on conclut facilement

$$\Delta(z) > \frac{e}{z}\left(e^{\frac{z}{e}} - 1\right), \quad \ldots.$$

4. Voici maintenant un problème d'un ordre plus général où s'introduit d'elle-même la transcendante qui fait l'objet du paragraphe précédent.

Il existe une infinité de séries

$$(6) \qquad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

à coefficients réels, positifs et tels que l'équation algébrique

$$(7) \qquad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_k z^k = 0,$$

obtenue en égalant à zéro la somme des $k+1$ premiers termes de (6), ait toutes ses racines réelles quel que soit $k$.

On s'assure bien simplement de l'existence effective de telles séries de la manière suivante. Soit

$$(7) \qquad f_k(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_k z^k = 0,$$

une équation algébrique à coefficients réels, positifs et à racines

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_k,$$

toutes réelles et inégales ; il est facile de voir qu'on peut choisir, et cela d'une infinité de manières, un coefficient réel positif $A_{k+1}$, de sorte que l'équation

$$(8) \qquad f_{k+1}(z) = f_k(z) + A_{k+1} z^{k+1}$$

ait également toutes ses racines réelles et inégales. Car, en choisissant $k$ nombres réels

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_k,$$

de sorte qu'on ait

$$\xi_1 < z_1 < \xi_2 < z_2 < \ldots < \zeta_k < z_k,$$

les valeurs

$$f_k(\xi_i) \quad \text{et} \quad f_k(\xi_{i+1}),$$

seront différentes de zéro et de signes contraires, et de plus on aura

$$\begin{array}{lll} \text{pour } k \text{ pair} & f_k(\xi_1) > 0, & f_k(\xi_k) < 0, \\ \text{pour } k \text{ impair} & f_k(\zeta_1) < 0, & f_k(\xi_k) < 0. \end{array}$$

D'autre part, on peut toujours trouver une quantité réelle positive $\delta$ suffisamment petite pour que, quelle que soit la valeur de $A_{k+1}$ comprise entre o et $\delta$, la fonction $f_{k+1}(z)$, définie par (8), ait pour $z = \xi_i$ le même signe que $f_k(z)$. Et comme l'on a

$$\begin{array}{lll} \text{pour } k \text{ pair} & f_{k+1}(-\infty) < 0, & f_{k+1}(\infty) > 0, \\ \text{pour } k \text{ impair} & f_{k+1}(-\infty) > 0, & f_{k+1}(\infty) > 0, \end{array}$$

l'équation $f_{k+1}(z) = 0$ aura une racine dans chacun des $k+1$ intervalles

$$(-\infty, \xi_1), \quad (\xi_1, \xi_2), \quad \ldots, \quad (\xi_{k-1}, \xi_k), \quad (\xi_k, \infty),$$

et par suite elle a toutes ses racines réelles et inégales.

On formerait ainsi, de proche en proche, des équations

$f_n(z) = 0$ des degrés de plus en plus élevés, ce qui prouve bien l'existence des séries (6) en question [1].

Désignons maintenant par $\lambda(n)$ une quelconque des fonctions de $n$ suivantes :

1° Polynomes $P(n)$ quelconques n'ayant que des zéros réels et négatifs ;

2° Fonctions de la forme $e^{hn}P(n)$, où $h$ est un nombre réel quelconque ;

3° Fonctions entières $G(n)$ quelconques de $n$, de genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels et négatifs ;

4° Fonctions de la forme $e^{-hn^2}$, $h$ étant un nombre réel et positif quelconque ;

5° Produit d'un nombre quelconque de fonctions 1°, 2°, 3°, 4° ;

6° Fonctions de la forme

$$\frac{\lambda_1(n)}{\lambda_2(0)\lambda_2(1)\ldots\lambda_2(n)},$$

$\lambda_1(n)$ et $\lambda_2(n)$ étant deux quelconques parmi les fonctions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°.

Laguerre a montré [2] que, si une équation algébrique

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en sera de même de l'équation

$$a_0\lambda(0) + a_1\lambda(1)x + \ldots + a_n\lambda(n)x^n = 0.$$

On en conclut directement que, connaissant une série (6), on peut en déduire une infinité de la forme

$$A_0\omega_0 + A_1\omega_1 z + A_2\omega_2 z^2 + \ldots,$$

jouissant de la propriété caractéristique des séries (6) : il suffit de prendre pour $\omega_n$ une quelconque des fonctions $\lambda(n)$.

*C'est l'étude des fonctions définies par les séries* (6) *qui se rattache à la transcendante entière*

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

---

(1) *Voir* aussi *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XIII, 1906, p. 135-136.

(2) *Œuvres*, t. I, p. 33-36, 199-206, etc.

considérée au paragraphe précédent, comme on le verra dans ce qui suit.

5. Appelons, pour abréger, *fonctions* $\Omega(z)$ toute fonction de $z$ définie par une série (6).

En désignant par

$$\zeta_1, \ \zeta_2, \ \ldots, \ \zeta_n$$

les valeurs absolues des inverses des racines, manifestement toutes négatives, de l'équation algébrique

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n = 0,$$

on aura

$$\frac{A_n}{A_0} = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n,$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n.$$

Les quantités $\zeta_i$ étant toutes réelles et positives, on aura, d'après la proposition classique sur la moyenne géométrique,

$$\sqrt[n]{\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n} \leqq \frac{1}{n} (\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n),$$

ou bien

$$A_n \leqq \frac{A_0}{n^n} \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n. \tag{9}$$

Par suite, en remarquant que

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n} = 1 + z \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

on conclut que *les coefficients du développement d'une fonction $\Omega(z)$ quelconque suivant les puissances de $z$ sont au plus égaux à ceux de la fonction*

$$A_0 + A_1 z \Delta \left(\frac{A_1 z}{A^0}\right),$$

*où $\Delta(z)$ désigne la transcendante*

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

C'est cette proposition qui rattache la transcendante $\Delta(z)$ aux fonctions $\Omega(z)$. Les inégalités relatives à $\Delta(z)$ s'étendent dès lors à toutes ces fonctions ; nous citerons les plus immédiates.

Tout d'abord l'inégalité (9) fait voir que *toute fonction* $\Omega(z)$ *est une fonction entière de genre zéro ou un.*

La même inégalité fait aussi voir que, pour toute valeur réelle ou imaginaire de $z$, *le module d'une fonction* $\Omega(z)$ *quelconque est inférieur à*

$$A_0 + A_1 r \Delta\left(\frac{A_1 r}{A^0}\right) \qquad r = |z|.$$

En même temps, en s'appuyant sur l'inégalité précédente

$$\Delta(r) < e^{\frac{r}{e}},$$

on voit que *l'expression*

$$A_0 + A_1 r e^{\frac{A_1 r}{A_0 e}}$$

*donne aussi une limite supérieure du module de* $\Omega(z)$.

D'après une proposition de Laguerre (¹), les coefficients d'une série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

à coefficients tous positifs, représentant une fonction entière de genre inférieur à deux, ayant toutes ses racines réelles, sont inférieurs aux coefficients correspondants de la série

$$a_0 e^{\frac{a_1 z}{a_0}}.$$

Nous ferons remarquer que la limite supérieure

$$\frac{A_0}{n^n}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n,$$

que nous avons trouvée pour le coefficient $A_n$ de $\Omega(z)$, est manifestement inférieure à

$$\frac{A_0}{1.2\ldots n}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n$$

et par suite *plus précise* que la limite fournie par la proposition de Laguerre.

Il en est évidemment de même pour la limite supérieure que nous venons de trouver pour le module de $\Omega(z)$, puisqu'on a

(¹) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 34-36.

pour $r$ réel et positif

$$A_0 + A_1 r \Delta\left(\frac{A_1 r}{a_0}\right) < A_0 e^{\frac{A_1 r}{A_0}}.$$

Enfin, la seconde limite supérieure

$$A_0 + A_1 r e^{\frac{A_1 r}{A_0 e}},$$

que nous avons trouvée pour le module de $\Omega(z)$, est aussi *plus précise* que celle de Laguerre : la différence entre celle-ci et la nôtre

$$A_0 \sum_0^\infty \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{e^{n-1}}\right)\left(\frac{A_1 r}{A_0}\right)^n$$

est positive puisque pour $n > 1$ on a

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{e^{n-1}}.$$

La fonction $\Omega(z)$ croît indéfiniment pour les valeurs positives de $z$ indéfiniment croissantes ; l'inégalité

$$\Omega(z) < A_0 + A_1 z \Delta\left(\frac{A_1 z}{A_0}\right)$$

et l'égalité asymptotique

$$\Delta(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\, \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}},$$

trouvée précédemment, montrent alors qu'*une fonction quelconque* $\Omega(z)$ *croît moins vite que la fonction*

$$\frac{H e^{hz}}{\sqrt{z}},$$

*où* H *et* $h$ *sont des constantes ayant pour valeurs*

$$H = A_1 \sqrt{\frac{2\pi A_0}{e A_1}}, \qquad h = \frac{A_1}{e A_0}.$$

L'inégalité (9) conduit aussi à des inégalités relatives aux zéros de $\Omega(z)$, parmi lesquelles nous indiquerons la suivante :

Soient

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \ldots$$

les valeurs absolues de ces zéros (tous réels et négatifs), rangées suivant leurs grandeurs croissantes, et formons la fonction

$$\varphi(r) = c_0^2 + c_1^2 r^2 + c_2^2 r^4 + \ldots,$$

avec

$$c_n = \frac{A_0}{n^n}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^n.$$

En vertu d'une proposition que j'ai démontrée antérieurement [1] et d'après l'inégalité (9), on aura

$$\zeta_1 \geqq \frac{A_1 r}{\sqrt{\varphi(r)}},$$

quelle que soit la valeur réelle et positive de $r$. En prenant la valeur particulière

$$r = \frac{A_0}{A_1},$$

on aura

$$\varphi(r) = A_0^2 \sum_0^\infty n^{-2n} = 2{,}06388\ldots A_0^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(r)}} = \frac{0{,}6960\ldots}{A_0},$$

d'où la conclusion suivante : *une limite inférieure des valeurs absolues des zéros de toute fonction* $\Omega(z)$ *est donnée par l'expression*

$$0{,}6961\,\frac{A_0}{A_1}.$$

On arrive même à la proposition plus générale que *le produit des modules des $k$ premiers zéros de* $\Omega(z)$ *est égal ou supé-*

---

[1] Si l'on désigne par $\rho$ le plus petit module des zéros d'une série quelconque $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2}(a_0^2 + a_1^2 r^2 + a_2^2 r_4^2 + \ldots),$$

on aura

$$\rho \geqq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}},$$

quelle que soit la valeur réelle et positive $r$, inférieure au rayon de convergence de la série (M. Petrovitch, *Bull. de la Soc. math. de France,* t. XXIV, 1901, p. 302-312 ; E. Landau, *Bull. de la Soc. math. de France,* t. XXXIII, 1905, p. 251-261).

*rieur à*

$$0,6961\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^k.$$

On conçoit, d'ailleurs, facilement que les inégalités précédentes permettent de nombreuses applications des résultats récents sur les séries de Taylor aux fonctions $\Omega(z)$.