G. RÉMOUNDOS

Sur la représentation uniforme des courbes transcendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 197-204
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__197_0>

SUR LA REPRÉSENTATION UNIFORME DES COURBES TRANSCENDANTES ;

Par M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Il est bien connu que les coordonnées des points des courbes algébriques de genre *zéro* et *un* peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes d'un paramètre, méromorphes dans tout le plan ; M. Picard a démontré qu'une telle représentation uniforme est impossible pour les courbes algébriques de genre supérieur à *un*, qui exigeraient des transcendantes uniformes d'une nature beaucoup plus compliquée avec des singularités essentielles formant un ensemble continu ou un ensemble parfait discontinu.

M. Poincaré a démontré qu'il est toujours possible de faire une représentation uniforme d'une fonction multiforme quelconque (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XI). Son théorème consiste en ce que, étant donnée une telle fonction $u = \varphi(z)$, nous pouvons trouver une troisième variable t, telle que u et z puissent s'exprimer uniformément en fonction de t par les formules

$$(1) \qquad u = \mathrm{H}(t), \qquad z = \mathrm{M}(t).$$

Le problème de la possibilité de la représentation uniforme d'une équation quelconque

$$(2) \qquad f(z, u) = 0$$

étant donc résolu par l'affirmative, la première question, qui se présente tout naturellement, concerne la nature et la complication des singularités des fonctions uniformes $\mathrm{H}(t)$ et $\mathrm{M}(t)$ qui constituent la représentation uniforme.

Il est, bien entendu, supposé que l'équation (2) définit une fonction $u = \varphi(z)$ analytique. En me plaçant dans le cas où cette équation est transcendante par rapport à l'une des deux variables z et u ou bien à toutes les deux, je me propose de signaler un résultat intéressant, qui découle de ceux que j'ai obtenus dans ma thèse [1] sur l'extension du théorème de M. Picard aux fonctions multiformes.

---

[1] *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* [Thèse de doctorat de l'Université de Paris (Gauthier-Villars et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*)].

2. Les fonctions $H(t)$ et $M(t)$ peuvent, *a priori,* présenter des singularités essentielles de toutes sortes. Si ces points sont isolés, autour de chacun d'eux il ne saurait y avoir plus de deux valeurs exceptionnelles, et cela d'après le théorème classique de M. Picard sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé; il en résulte que, dans ce cas, le nombre des valeurs *exceptionnelles générales* ne sera jamais supérieur à deux. Une valeur u_0 sera dite *exceptionnelle générale* pour une fonction $u = \sigma(t)$, lorsque l'équation

$$u_0 = \sigma(t)$$

n'admet qu'un nombre fini de racines dans *tout le plan.*

Cette notion est nécessaire lorsqu'il s'agit d'une fonction qui présente plusieurs points singuliers essentiels.

Le cas, dans lequel les fonctions uniformes $H(t)$ et $M(t)$ ne présentent pas de points singuliers *isolés,* est celui qui nous intéresse surtout ici, parce que, dans ce cas, l'ensemble des valeurs exceptionnelles générales pourrait être quelconque (continu ou discontinu) pour une fonction uniforme arbitrairement prise; il pourrait former des lignes, des aires embrassant une partie ou la totalité du plan des u, etc.

L'étude de cet ensemble, dont la nature peut nous fournir des renseignements intéressants sur la nature des fonctions $H(t)$ et $M(t)$, qui constituent la représentation uniforme de la fonction multiforme $u = \varphi(t)$, fera l'objet des considérations que j'exposerai dans les paragraphes suivants.

J'ai déjà abordé cette question dans ma thèse (p. 49, Chap. III) et je me propose de compléter ici les remarques que j'y ai faites d'une façon très abrégée. Nous commençons par donner quelques définitions.

3. Nous dirons qu'une valeur u_0 de u est *exceptionnelle* dans le voisinage d'un ensemble (T) [1] de points du plan t par rapport à une fonction $u = \sigma(t)$, lorsque l'équation

$$\sigma(t) = u_0$$

---

[1] Les points de cet ensemble sont supposés singuliers essentiels.

n'admet qu'un nombre fini de racines à l'intérieur de tout contour C renfermant tous les points de l'ensemble (T) et aucun autre point singulier essentiel de la fonction $\sigma(t)$ étranger à l'ensemble (T).

Cette définition n'est pas du tout vague dans le cas où l'ensemble (T) possède des points à l'infini et il n'est pas difficile de concevoir les aires [1] qui renferment *tous* les points de (T) à l'exclusion de tout autre point singulier essentiel étranger à (T). Le point du plan u correspondant à u_0 sera appelé aussi exceptionnel. Nous distinguons trois cas :

α'. L'ensemble de ces points exceptionnels du plan u est ou bien fini ou bien dénombrable *isolé* (c'est-à-dire il n'est dense nulle part);

β'. Le même ensemble est dense dans diverses portions du plan u, mais il n'embrasse pas tout le plan; ou bien il est parfait discontinu;

γ'. L'ensemble est dense partout et embrasse tout le plan; c'est-à-dire son ensemble dérivé est formé de tous les points du plan.

Dans le premier cas, nous dirons que la fonction $\sigma(t)$ est indéterminée dans le voisinage de l'ensemble (T) avec une *indétermination complète*. Dans le deuxième cas, nous dirons qu'il y a une *indétermination incomplète*. Dans le troisième cas, le degré de l'indétermination est un peu vague et il est difficile de la caractériser d'une façon sommaire, puisqu'il peut se présenter des circonstances diverses pour l'ensemble des valeurs exceptionnelles, qui peut être dénombrable aussi bien que continu. A ce cas se ramène le cas de la non-indétermination, où l'ensemble des valeurs u_0 pour lesquelles l'équation

$$u_0 = \sigma(z)$$

admet un nombre fini de branches dans le voisinage de l'ensemble T (c'est-à-dire dans une portion du plan telle que nous l'avons spécifiée plus haut), ne contient aucun élément.

---

(1) On évitera ici d'employer le mot *contour*. (*Voir* la remarque du n° 6.)
Dans cette définition, nous supposons, bien entendu, qu'il s'agit des ensembles que nous pouvons isoler des autres points singuliers; autrement, la définition n'aurait pas de sens.

M. Painlevé a déjà employé des dénominations pareilles dans une étude sur l'indétermination d'une fonction multiforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel. [Voir : *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* 1900). Le lecteur pourra aussi lire avec profit la thèse de M. Painlevé : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques,* Gauthier-Villars, 1887.]

Le cas le plus intéressant pour le but que nous poursuivons est celui où l'ensemble (T) est continu, parce qu'il est très probable que les fonctions uniformes ne peuvent présenter qu'une indétermination complète dans le voisinage d'un point appartenant à un ensemble parfait discontinu. C'est ce que M. Zoretti a essayé de démontrer dans sa remarquable thèse (Gauthier-Villars et *Journal de M. Jordan,* 1905). La chose reste encore douteuse.

4. Cela posé, supposons d'abord que l'équation (2) soit algébrique (polynome) en u de degré n et *transcendante* entière en z et remarquons que toute valeur exceptionnelle générale de la fonction $u = \mathrm{H}(t)$ sera aussi exceptionnelle pour la fonction multiforme $u = \varphi(z)$ (*voir* ma thèse, *loc. cit.*), qui n'a qu'un nombre fini de branches. Or, je démontre dans ma thèse que cette dernière fonction ne saurait jamais avoir plus de $2n$ valeurs exceptionnelles, l'infini compris ; il en sera donc de même des valeurs exceptionnelles générales de $u = \mathrm{H}(t)$.

Supposons encore que $u = \mathrm{H}(t)$ admette des ensembles continus singuliers (points isolés, lignes, aires) essentiels $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_m, \ldots$ et appelons $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_m, \ldots$ les ensembles de points exceptionnels du plan u correspondant respectivement au voisinage des $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_m, \ldots$; on a le théorème suivant :

I. *L'ensemble des points communs aux ensembles* $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_m, \ldots$ *est fini et le nombre de ses éléments ne saurait dépasser* $2n$.

Le cas nouveau est celui où tous les ensembles T_i sont continus *proprement dits,* c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de points singuliers essentiels *isolés;* dans le cas contraire, le théorème était évident. Nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire. — *Si les singularités essentielles de la fonction* $u = \mathrm{H}(t)$ *ne forment qu'un ensemble continu* [1] T (*une ligne ou une aire*), *dans le voisinage de cet ensemble il y aura une indétermination complète de la fonction* $u = \mathrm{H}(t)$, *le nombre des valeurs exceptionnelles étant au plus égal à* $2n$. Nous ne pouvons pas en dire autant pour la fonction $z = \mathrm{M}(t)$.

Passons maintenant au cas où $f(z, u)$ désigne une fonction transcendante entière par rapport aux variables z et u, toutes les deux, et rappelons-nous le théorème général établi dans ma thèse (p. 43) et énoncé comme il suit :

Les ensembles (E) *et* (ε) *des valeurs exceptionnelles de la fonction multiforme* $u = \varphi(z)$ *et de son inverse* $z = \Psi(u)$ *sont ou bien finis ou bien dénombrables avec un seul point limite à l'infini* (par conséquent *isolés,* pas denses).

Faisons sur la fonction $z = \mathrm{M}(t)$ la même hypothèse que sur $u = \mathrm{H}(t)$ et appelons $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_i, \ldots$ les ensembles continus ou points isolés de singularités essentielles de la fonction $z = \mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \mathrm{Z}_3, \ldots, \mathrm{Z}_i, \ldots$ les ensembles de points exceptionnels du plan z correspondant respectivement aux voisinages des $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_i, \ldots$.

La remarque que les ensembles U_i font partie de l'ensemble (E) et les ensembles Z_i font partie de (ε) nous conduit au théorème suivant :

II. *Les points communs des ensembles* U_i *forment un ensemble ou bien fini ou bien dénombrable isolé avec un point limite à l'infini. Il en est de même des ensembles* Z_i, *ce qui distingue essentiellement ce cas du cas précédent, où* $f(z, u)$ *était un polynome par rapport à* u.

Corollaire. — *Si les singularités essentielles des fonctions* $\mathrm{H}(t)$ *et* $\mathrm{M}(t)$ *ne forment qu'un ensemble continu* (*une ligne*

---

[1] Je m'attache ici surtout au cas où l'ensemble (T) est continu. Cette restriction n'a pas du tout des motifs essentiels, puisque ces résultats s'étendent d'eux-mêmes à tous les ensembles non isolés.

ou une aire), *dans le voisinage de cet ensemble il y aura une indétermination complète des fonctions* $H(t)$ *ou* $M(t)$. Ceci s'énoncerait encore sous la forme suivante :

« Il est impossible de satisfaire à l'équation $f(z, u) = o$, $f(z, u)$ désignant une transcendante entière par rapport à z et u, par des fonctions uniformes $u = H(t)$ et $z = M(t)$ ayant un ensemble continu *unique* de singularités essentielles d'une indétermination incomplète. Il en sera de même lorsqu'il n'y aura aucune indétermination dans le voisinage de cet ensemble. »

5. Les considérations précédentes nous fournissent des renseignements sur les valeurs des fonctions $H(t)$ et $M(t)$ dans le voisinage d'une ligne singulière ou d'une aire singulière, prises dans leur ensemble. Mais il serait intéressant de savoir ce qui peut se passer dans le voisinage d'un point quelconque de l'ensemble continu de singularités.

Pour fixer les idées, supposons que la fonction $H(t)$ admette une ligne singulière essentielle (L) et n'ait aucun point essentiel en dehors de cette ligne. D'après le dernier corollaire, il y aura une indétermination complète dans le voisinage de la ligne, prise dans son ensemble; mais, si nous considérons un point quelconque de la ligne dans son voisinage (c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle arbitrairement petit décrit de ce point comme centre), il peut bien y avoir une indétermination incomplète ou bien la fonction pourra y être déterminée.

Nous pouvons compléter les résultats de ce travail par la remarque suivante :

Il y aura indétermination non seulement le long de toute la ligne (L), *mais encore dans le voisinage de segments de la ligne arbitrairement petits* (*aussi petits que l'on voudra*).

En effet, nous pouvons toujours diviser la ligne (L) en une infinité dénombrable [1] de segments de longueur égale à ε, ε étant arbitrairement petit. S'il n'y avait pas d'indétermination dans le voisinage d'aucun de ces segments, l'ensemble des valeurs exceptionnelles dans chacun de ces voisinages embrassant tout le plan

---

[1] Ou bien en un nombre fini de segments.

des u, sauf un ensemble dénombrable de points isolés, il en serait de même pour le voisinage de toute la ligne (L).

Pour nous en rendre compte, appelons l_1, l_2, l_3, ..., l_n, ... les divers segments et s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ... les ensembles de valeurs non exceptionnelles correspondant respectivement au voisinage de ces segments.

Il est clair que, si l'on exclut du plan des u l'ensemble

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n + \ldots,$$

qui est dénombrable ou fini, la partie restante du plan serait tout exceptionnelle le long de la ligne (L). Ainsi la fonction $H(t)$ admettrait le long de la ligne entière (L) un ensemble continu de valeurs exceptionnelles, ce qui serait absurde d'après le corollaire du paragraphe 4.

Les raisonnements employés pour cette démonstration reposent sur la proposition suivante :

Pour qu'une valeur u_0 ne soit pas exceptionnelle le long de toute la ligne (L), *il suffit qu'elle ne le soit pas pour un des segments l_i.*

Cette condition n'est évidemment pas nécessaire.

6. Je termine ce travail par une petite remarque au sujet de la définition donnée au commencement du paragraphe 3.

Pour éviter le mot *contour,* qui entraînerait une certaine ambiguïté, surtout dans le cas où l'ensemble (T) contient des points à l'infini, nous pouvons procéder comme suit :

La valeur u_0 sera dite *exceptionnelle* dans le voisinage de l'ensemble T, lorsque l'équation

$$u_0 = \sigma(t)$$

n'admet qu'un nombre fini de racines dans une portion du plan t quelconque, contenant ([1]) *tous* les points de l'ensemble (T) et *aucun* autre point singulier essentiel de la fonction $\sigma(t)$.

Weierstrass et M. Freedholm ([2]) ont formé des séries repré-

([1]) En d'autres termes, les points de l'ensemble (T) appartiennent à cette portion du plan, tandis que les autres points singuliers essentiels n'en font pas partie

([2]) Voir : *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 24 mars 1890 et *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 70-71.

sentant des fonctions qui ne peuvent pas être étendues analytiquement au delà du cercle de convergence et *convergentes* sur la circonférence de ce cercle, qui est, par conséquent, une ligne singulière essentielle pour ces fonctions. Il est clair qu'elles ne présentent aucune indétermination ni dans le voisinage d'un arc de la circonférence arbitrairement petit, ni le long de toute la circonférence. *Il est donc impossible, d'après les résultats exposés dans ce travail, qu'elles se prêtent à la représentation uniforme d'une fonction multiforme rentrant dans la classe étudiée ici.*

Il est remarquable que ces résultats soient dus à la transcendance de l'équation (2) par rapport à l'une, au moins, des variables z et u; nous avons ainsi une spécification des fonctions de la représentation uniforme d'une équation transcendante (2) sans en avoir aucune pour les équations algébriques de genre supérieur à *un*.

7. En corrigeant les épreuves, j'ajoute la remarque suivante : Le théorème du paragraphe 5 entraîne ce fait intéressant qu'il y aura un point, au moins, de la ligne qui sera point d'*indétermination,* au sens classique du mot; c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs, non exceptionnelles dans un cercle arbitrairement petit entourant ce point, ne sera pas *dénombrable isolé*. En effet, l'existence d'un segment d'indétermination de longueur ε entraînera celle d'un autre segment d'indétermination compris dans le premier et de longueur $\varepsilon_1 < \varepsilon$ èt ainsi de suite; nous aurons une suite indéfinie de segments de longueurs $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$ tendant vers zéro et dont chacun fait partie du précédent; il est clair que ces segments tendront vers un point limite, dans le voisinage duquel l'indétermination sera certaine. Pour s'en rendre compte, il n'y a qu'à remarquer que, si l'équation

$$u_0 = \mathrm{H}(t)$$

admet un nombre *fini* de racines à l'intérieur d'un cercle entourant ce point $t = t_0$, il en sera de même de tout autre cercle faisant partie du premier.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si les singularités essentielles des fonctions $\mathrm{H}(t)$ *et* $\mathrm{M}(t)$ *forment une ligne singulière ou un ensemble fini de lignes singulières, il y aura toujours, au moins, un point d'indétermination.*