BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Sur les surfaces du troisième et du quatrième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une courbe de quatrième ordre et de quatrième classe

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 70-74

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__70_0>

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE QUI ADMETTENT POUR LIGNE ASYMPTOTIQUE UNE COURBE DE QUATRIÈME ORDRE ET DE QUATRIÈME CLASSE;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. La détermination du nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface contienne une courbe donnée est dans le cas général un problème délicat. Il en est de même, évidemment, de la détermination du nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit ligne asymptotique, ou, autrement dit, ait, à la fois, ses points sur la surface et ses plans osculateurs tangents à la surface. Cependant, on peut traiter facilement le problème dans quelques cas simples ([1]); il m'a semblé que les résultats obtenus dans des cas particuliers d'un problème généralement difficile pouvaient présenter quelque intérêt.

Je considère ici le cas où la courbe est de quatrième ordre et de quatrième classe. Je rappellerai qu'il y a deux sortes de courbes à distinguer ([2]); les unes sont les transformées homographiques de la biquadratique

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

dont le plan osculateur a pour équation

$$X - 6\lambda^2 Y + 8\lambda^3 Z - 3\lambda^4 T = 0;$$

les autres sont les transformées homographiques de la quartique à sécantes triples

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

dont le plan osculateur a pour équation

$$X - 2\lambda Y + 2\lambda^3 Z - \lambda^4 T = 0.$$

2. *Surfaces du troisième ordre ayant pour ligne asympto-*

([1]) J'ai déjà étudié le cas où la courbe donnée est une cubique gauche dans deux Mémoires (*Bull. Soc. math.*, t. XXVI, 1898 et t. XXVII, 1899).

([2]) Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 18.

tique une biquadratique de quatrième classe. — Il est facile de voir que les points d'intersection d'une biquadratique avec une surface algébrique d'ordre quelconque ne sont pas *indépendants*. En particulier, toutes les surfaces du troisième ordre qui passent par 11 points d'une pareille courbe ont en commun un 12^e^ point, l'équation qui donne les λ des points d'intersection n'ayant pas de terme du onzième degré.

Il suffit donc d'écrire que la surface passe par un point indépendant des 11 premiers pour qu'elle contienne 13 points, et, par suite, tous les points de la courbe. On a donc, dans l'équation générale des surfaces du troisième ordre qui contiennent la courbe, 12 paramètres de moins que dans l'équation générale du troisième ordre. Il est facile de vérifier que la première équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}F(X, Y, Z, T) = (Y^2 - XT)(AX + BY + CZ + DT) \\ + (Z^2 - YT)(A'X + B'Y + C'Z + D'T) = 0.\end{aligned}$$

Pour exprimer que le plan osculateur à la biquadratique est tangent à la surface il suffit, comme ce plan contient déjà la tangente à la courbe, d'écrire qu'il coupe une arête du tétraèdre de référence au même point que le plan osculateur, on a ainsi l'équation

$$\frac{F'_x(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1)}{1} = -\frac{F'_y(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1)}{6\lambda^2}.$$

Cette équation est du sixième degré en λ. Donc il y a 6 plans osculateurs qui touchent la surface en leurs points de contact avec la courbe; l'équation n'ayant pas de terme en λ^5 ces points ne sont pas indépendants; il y a donc 6 conditions seulement à exprimer pour que la courbe soit ligne asymptotique; on obtient alors, comme équation générale des surfaces cherchées,

$$\alpha(Y^3 + XYT - 4XZ^2) + \beta(4YZ^2 - 5Y^2T + XT^2) = 0.$$

On a en évidence dans cette équation deux surfaces du quatrième ordre, qui se conservent par toute transformation homographique conservant la biquadratique. Ces surfaces se coupent suivant la biquadratique, le long de laquelle elles se touchent et suivant la droite $X = Y = 0$.

3. *Surfaces du quatrième ordre ayant pour asymptotique une biquadratique de quatrième classe.* — Il suffit de 16 conditions pour que la surface du quatrième ordre contienne une biquadratique de quatrième classe; il reste alors, dans l'équation d'une pareille surface, 19 termes et l'on peut l'écrire

$$\begin{aligned}[(Z^2-YT)(&AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+2B'ZX\\ &+2B''XY+2CXT+2C'YT+2C''ZT+DT^2)\\ +(Y^2-XT)[&A_1X^2+A_1'Y^2+2B_1YZ+2B_1'ZX\\ &+2B_1''XY+2C_1XT+2C_1'YT+2C_1''ZT+D_1T^2]=0.\end{aligned}$$

On a en évidence, dans cette équation, outre les premiers membres des équations de deux quadriques simples contenant la biquadratique, ceux qui correspondent à deux autres quadriques, les premiers membres des équations de ces dernières contenant l'un 10 termes, l'autre 9 seulement, car on peut ne pas y écrire de terme en Z^2.

Si l'on forme, en opérant comme précédemment, l'équation qui donne les points où les plans osculateurs sont tangents à la surface, on obtient une équation du 10e degré. Il y a donc 10 plans osculateurs tangents à la surface; mais, *ces plans n'étant pas indépendants,* il suffit encore de 10 équations de condition pour exprimer que tous les plans sont tangents à la surface. Il reste donc 9 termes seulement dans l'équation que l'on peut écrire, en mettant en évidence les deux surfaces particulières du troisième ordre, obtenues au paragraphe précédent,

$$\begin{aligned}&(Y^3+3XYT-4XZ^2)(AX+BY+CZ+DT)\\ &\quad+(4YZ^2-5Y^2T+XT^2)(A'X+B'Y+C'Z+D'T)+K(Z^2-YT)^2=0.\end{aligned}$$

4. *Surfaces du troisième ordre ayant pour ligne asymptotique une quartique à sécantes triples.* — Les points d'intersection d'une telle courbe avec une surface sont *indépendants;* il y a donc 13 équations de condition à écrire pour exprimer qu'une surface du troisième ordre contient la courbe; l'équation de cette surface peut s'écrire

$$\begin{aligned}A(X^2Z-Y^3)+B(XZ^2-Y^2T)+C(YT^2-Z^3)&\\ +(XT-YZ)(\alpha X+\beta Y+\gamma Z+\delta T)&=0;\end{aligned}$$

l'équation qui détermine les points de contact des plans osculateurs tangents à la surface est

$$A\lambda^6 + \alpha\lambda^5 + \beta\lambda^4 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + C = 0.$$

Il y a donc 6 plans osculateurs tangents à la surface, mais l'équation n'ayant pas de terme en λ^3 ces plans ne sont pas indépendants. Il en résulte qu'il suffit, pour exprimer que la ligne est asymptotique, d'écrire 6 équations de condition. On voit immédiatement que l'équation de la surface est

$$XZ^2 - Y^2T = 0.$$

Il n'y a donc qu'une surface du troisième ordre admettant comme asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples, c'est la surface réglée à directrices distinctes. On savait bien qu'une pareille surface avait ses lignes asymptotiques du quatrième ordre et de quatrième classe, avec des sécantes triples; on voit que c'est la seule catégorie de surfaces du troisième ordre admettant une ligne asymptotique de cette nature.

5. *Surfaces du quatrième ordre ayant pour ligne asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples.* — On a 17 équations de condition à écrire pour exprimer qu'une surface du quatrième ordre contient la courbe; il reste donc dans l'équation de la surface 18 termes. L'équation qui donne les λ des points où le plan osculateur est tangent à la surface est du dixième degré; cette équation est complète et il n'existe aucune relation entre coefficients de termes de degrés différents, de sorte que *les plans sont indépendants,* tandis qu'il n'en était pas de même dans les autres cas traités déjà. On a alors 11 conditions nouvelles à exprimer pour que la courbe soit asymptotique, et il reste 7 termes dans l'équation qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned}&(X^2Z - Y^2T)(AX + BY + CZ + DT) + \alpha(YZ - XT)^2 \\ &\quad + \beta(Y^4 - 2X^2YZ + X^3T) + \gamma(Z^4 - 2YZT^2 + XT^3) = 0.\end{aligned}$$

On a en évidence dans l'équation une surface particulière se décomposant en un plan et une surface réglée du troisième ordre, un système de deux quartiques confondues, et deux surfaces du quatrième ordre proprement dites.

Les équations de ces dernières se déduisent l'une de l'autre en remplaçant X, Y, Z, T par T, Z, Y, X. Ce sont des surfaces réglées ayant chacune pour directrice triple la tangente à la ligne asymptotique, en un de ses points d'inflexion linéaire. Les génératrices de chacune de ces surfaces appartiennent à une congruence linéaire ayant ses directrices confondues ([1]).

6. *Points doubles des surfaces.* — Les surfaces passant par une courbe algébrique et ayant cette courbe comme asymptotique possèdent des points doubles situés sur la courbe. C'est une propriété générale que j'ai déjà eu occasion de signaler dans le cas où la courbe est une cubique gauche ([2]).

Il suffit, pour le voir, de remarquer que les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, qui sont les coefficients de l'équation du plan tangent, sont proportionnelles aux coefficients de l'équation du plan osculateur. Or le coefficient de X dans cette équation étant 1, le coefficient de proportionnalité est F'_x. Donc on aura des points doubles donnés par

$$F'_x(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1) = 0$$

dans le cas de la biquadratique, et par

$$F'_x(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1) = 0$$

dans le cas de l'autre courbe. Il est facile de reconnaître que la première équation est du huitième degré en λ et la seconde du sixième.

On voit ainsi que, bien que les courbes soient du même ordre et de la même classe, les degrés des équations déterminant les points doubles ne sont pas les mêmes.

J'ajouterai que les équations peuvent avoir des racines multiples, et que, par suite, plusieurs points doubles peuvent se confondre. Ce fait se produit sans que l'ordre de multiplicité des points augmente, en général. Ordinairement il y a seulement décomposition du cône des tangentes. Des faits analogues se produisaient quand la ligne asymptotique était une cubique gauche.

([1]) Voir *Bull. Soc. math.*, t. XIX, p. 120.
([2]) Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXVI, 1898, p. 226.