BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur les séries entières et les approximations successives

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 81-91

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__81_0>

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES ET LES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

où le second membre est une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine D défini par les conditions

$$|x| \leqq a, \qquad |y| \leqq b,$$

et dont le module ne dépasse pas un nombre positif M dans ce domaine D, on sait que l'intégrale de l'équation (1) qui prend la valeur $y = 0$ pour $x = 0$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine pour centre, dont le rayon est au moins égal au plus petit des deux nombres a et $\frac{b}{M}$. C'est là un résultat aujourd'hui classique, qui se déduit aisément de la première méthode de Cauchy, ainsi que de la méthode des approximations successives de M. Picard.

Il paraît difficile d'avoir une limite plus avantageuse pour le rayon du domaine où l'intégrale est holomorphe, si l'on ne possède pas sur la fonction $f(x, y)$ d'autres renseignements que ceux qui figurent dans l'énoncé que je viens de rappeler. Mais, si l'on connaît le domaine de convergence de la série entière $f(x, y)$, on peut énoncer un résultat plus précis, qui donne dans tous les cas le moyen d'avoir la limite la plus grande possible fournie par l'application du théorème précédent.

2. Nous rappellerons d'abord, en les précisant sur certains points, les propositions principales relatives aux séries entières à plusieurs variables.

Soit

$$\sum a_{mn} x^m y^n \tag{2}$$

une série entière en x et y, à coefficients quelconques. D'après un théorème classique, si cette série est convergente pour $x = x_0$, $y = y_0$ (ou du moins si le module du terme général $a_{mn} x_0^m y_0^n$ reste inférieur à un nombre fixe, quels que soient m et n), la série (2) est absolument convergente pour tout système de valeurs de x et de y tel que l'on ait à la fois

$$|x| < |x_0|, \qquad |y| < |y_0|.$$

Si l'on décrit de l'origine comme centre, dans les plans des x et des y respectivement, deux cercles C et C′ de rayon $|x_0|$ et $|y_0|$ respectivement, la somme $F(x, y)$ de la série (2) est une fonction holomorphe des variables x et y, lorsque la variable x reste dans le cercle C et la variable y dans le cercle C′. On se contente généralement d'établir ce résultat dans la plupart des Cours d'Analyse, et d'étudier la fonction $F(x, y)$ dans le domaine qui vient d'être défini.

Pour avoir une idée plus précise du domaine de convergence de la série (2), commençons par étudier la série des modules

$$(3) \qquad \sum A_{mn} X^m Y^n, \qquad A_{mn} = |a_{mn}|, \qquad X = |x|, \qquad Y = |y|,$$

et cherchons dans quelle partie de l'angle XOY on doit prendre le point de coordonnées (X, Y) pour que cette série (3) soit convergente.

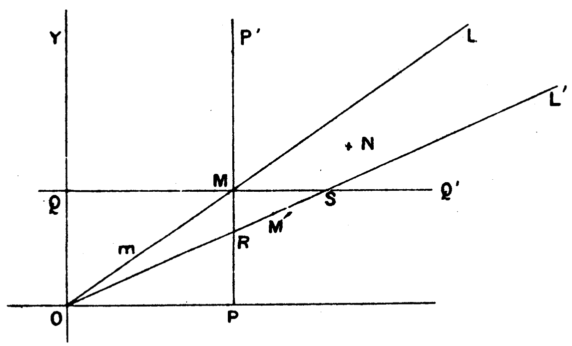
D'après le théorème rappelé au début de ce paragraphe, si la série (3) est convergente pour les coordonnées d'un point M pris dans l'angle XOY, elle est aussi convergente en tout point pris à l'intérieur ou sur les côtés du rectangle OPMQ, ayant deux côtés sur OX et OY et dont le point M est un sommet. Au contraire, si la série est divergente au point M, elle est forcément divergente en tout point N pris dans l'angle P′MQ′ ou sur les côtés MP′, MR′ de cet angle; car, si la série était convergente au point N, elle le serait *a fortiori* au point M.

Cela posé, considérons une demi-droite indéfinie OL dans l'angle XOY, et un point m décrivant cette droite à partir de l'origine. Les coordonnées de ce point m, et par suite tous les termes de la série (3), vont en croissant lorsque le point m s'éloigne de l'origine. Il y a donc sur la droite OL un point séparatif M tel que la série (3) est convergente pour tout point du segment OM compris entre l'origine et le point M, et divergente pour tout point de OL au delà du point M [1].

Comme cas particuliers, il peut arriver que le point M soit à l'origine; les deux séries (3) et (2) sont alors divergentes sauf pour $x = y = 0$. Si le point M est rejeté à l'infini, la série (3) est au contraire absolument convergente, quels que soient x et y, et représente une fonction entière des deux variables x et y.

Laissant de côté ces cas extrêmes, sur chaque demi-droite située dans l'angle XOY, nous avons ainsi un point M, dont la distance à l'origine varie d'une manière continue avec le coefficient angulaire λ de cette droite. Soit en effet OL′ une demi-droite voisine de OL (*fig.* 1). La série (3) est convergente pour tout

Fig. 1.



point du segment OM et par suite pour tout point du segment OR; au contraire, cette série (3) est divergente en tout point de la demi-droite indéfinie ML et par suite en tout point de la demi-droite indéfinie SL′. Le point séparatif M′ de la demi-droite OL′ est donc un point du segment RS, et par conséquent ce point M′ vient se confondre avec le point M lorsque OL′ vient se confondre avec OL. Il est à remarquer que la démonstration ne s'applique plus aux axes eux-mêmes OX et OY. Lorsque OL vient se con-

[1] Si λ est le coefficient angulaire de la droite OL, l'abscisse du point M est l'inverse de *la limite supérieure pour n infini de l'expression* $\sqrt[n]{A_{pq}\lambda^q}$, où $n = p + q$ (LEMAIRE, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1906, p. 286). Il serait intéressant d'étudier, au moins dans quelques cas simples, la fonction de λ ainsi définie.

fondre avec OY, le point M ne tend pas forcément vers le point séparatif situé sur OY, comme nous en verrons tout à l'heure un exemple.

Le lieu décrit par le point M lorsque la demi-droite OL décrit l'angle XOY est donc une courbe continue Γ. Il résulte de la façon même dont on a obtenu cette courbe que, si $x = R$, $y = R'$ sont les coordonnées d'un point quelconque de Γ, *la série* (2) *est absolument convergente si l'on a à la fois*

$$|x| < R, \qquad |y| < R',$$

et divergente si l'on a à la fois

$$|x| > R, \qquad |y| > R'.$$

Les cercles C et C', de rayon R et R', décrits de l'origine pour centre dans les plans des variables x et y respectivement, constituent un système de *cercles de convergence associés*. A tout point de la courbe Γ correspond un pareil système de cercles associés.

D'une façon générale, la série (2) est absolument convergente pour un système de valeurs des variables x et y, si le point m de coordonnées $|x|$ et $|y|$ est intérieur à la courbe Γ, divergente si ce point m est extérieur à Γ. Il y a doute si le point m est sur Γ.

L'ensemble des systèmes de valeurs des variables complexes x et y, tels que le point m de coordonnées $|x|$ et $|y|$ soit à l'intérieur de Γ constitue un continuum connexe D de l'espace à quatre dimensions, à l'intérieur duquel la série (2) est absolument convergente, et la somme $F(x, y)$ de cette série est une fonction holomorphe des variables x et y dans ce domaine D.

3. Cette courbe séparatrice Γ peut avoir des formes très diverses, suivant la série considérée. Il résulte seulement du raisonnement fait plus haut que l'ordonnée d'un point de cette courbe ne peut augmenter lorsque l'abscisse augmente et inversement. Pour voir ce qui arrive lorsque OL tend vers OX, il suffit de remarquer que l'abscisse du point M ne peut décroître et que l'ordonnée de ce point ne peut augmenter; y tend donc vers une limite finie, tandis que x peut tendre vers une limite ou augmenter indéfiniment. La courbe Γ peut donc aboutir à un point de OX, ou avoir une

asymptote parallèle à OX, qui peut être l'axe lui-même. Il est clair que tout cela s'applique aussi à l'axe OY. Nous allons donner quelques exemples.

1° La série double

$$\sum_{m,n} \mathrm{M}\left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)}$$

est convergente si l'on a à la fois

$$|x| < a, \qquad |y| < b,$$

et dans ce cas seulement. La courbe Γ est formée ici des deux côtés d'un rectangle parallèle aux axes. On prend généralement une fonction majorante de ce type dans les démonstrations du calcul des limites, mais il y aurait souvent avantage à prendre des majorantes appartenant à des types différents.

2° La série double

$$\sum_{m,n} \mathrm{M}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{\mathrm{M}}{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}$$

n'est absolument convergente que si l'on a

$$\left|\frac{x}{a}\right| + \left|\frac{y}{b}\right| < 1.$$

La courbe Γ est ici le segment de la droite

$$\frac{\mathrm{X}}{a} + \frac{\mathrm{Y}}{b} = 1,$$

compris entre les axes OX, OY.

3° La série double $\Sigma a_{mn} x^m y^n$, où l'on a $a_{mm} = 1$, et $a_{mm} = 0$ (pour $m \neq n$), n'est convergente que si l'on a $|xy| < 1$. La courbe Γ est une branche d'hyperbole asymptote aux deux axes.

4° La série

$$\sum{}' \mathrm{M}\left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n,$$

où les indices m et n varient de *un* à $+\infty$, est encore divergente si l'on a $|x| > a$ ou $|y| > b$. La courbe Γ se compose donc, comme dans le second exemple, des deux côtés d'un carré, et cependant la série est aussi convergente pour $x = 0$ ou pour $y = 0$. Lorsque la demi-droite OL tend vers OX, le point M de OL tend vers le point d'abscisse a sur OX, tandis que le point séparatif sur l'axe est rejeté à l'infini.

4. Reprenons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

et soit Γ la courbe que nous venons de définir relativement à la série entière

$$f(x, y) = \sum a_{mn} x^m y^n.$$

La fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans le domaine D correspondant, et nous supposerons que $|f(x, y)|$ ne dépasse jamais un nombre positif M dans ce domaine. On peut toujours satisfaire à cette condition en remplaçant au besoin la courbe Γ par une courbe homothétique Γ' relativement à l'origine, et infiniment voisine de Γ.

Soit N un point de Γ de coordonnées (a, b). La fonction $f(x, y)$ est holomorphe lorsque l'on a à la fois $|x| < a$, $|y| < b$, et, d'après le résultat classique rappelé au début de cet article, l'intégrale de l'équation (1), qui est nulle pour $x = 0$, est certainement holomorphe dans un cercle de rayon h, h étant le plus petit des deux nombres

$$a = \mathrm{OP}, \qquad \frac{b}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}}.$$

Pour avoir la valeur de h la plus grande possible, il faut choisir le point N sur Γ de façon que le plus petit des deux nombres OP et $\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}}$ soit le plus grand possible.

Il suffit pour cela de prendre *le point d'intersection de la courbe* Γ *avec la demi-droite* OL *de coefficient angulaire* M.

En effet, si le point N est sur cette droite, on a $\mathrm{NP} = \mathrm{M} \times \mathrm{OP}$, ou

$$\mathrm{OP} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}}.$$

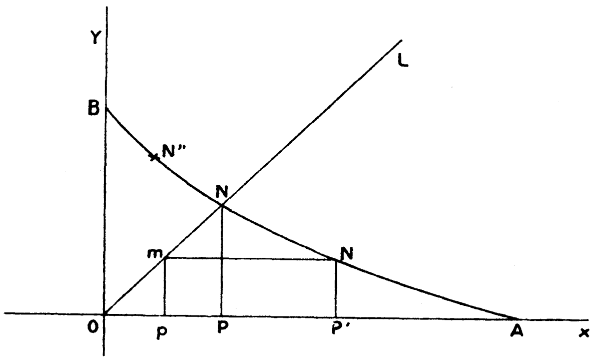
Pour un point N' de Γ à droite du point N (*fig.* 2), on a $\mathrm{OP}' > \mathrm{OP}$, mais

$$\frac{N'P'}{M} = \frac{mP}{M} = Op < OP.$$

Pour un point N″ de Γ à gauche de N, l'abscisse au contraire est inférieure à OP.

En définitive, l'intégrale de l'équation (1), qui est nulle pour

Fig. 2.



$x = 0$, est holomorphe dans un cercle décrit de l'origine pour centre, *dont le rayon est au moins égal à l'abscisse du point d'intersection de la courbe* Γ *avec la droite* $Y = MX$.

Lorsque la courbe Γ se réduit aux deux côtés du rectangle formé par les axes et les deux droites $X = a$, $Y = b$, on retrouve bien la limite ordinaire.

5. Les considérations développées plus haut s'étendent évidemment aux séries entières à un nombre quelconque de variables. Prenons en particulier une série entière à trois variables

$$\sum a_{mnp} x^m y^n z^p, \tag{4}$$

et soit

$$\sum A_{mnp} X^m Y^n Z^p \tag{5}$$

la série des modules correspondante. Sur chaque demi-droite OL située dans le trièdre OXYZ, il existe un point M séparant les points pour lesquels la série (5) est convergente des points pour lesquels elle est divergente. Le lieu de ce point M est une surface Σ située dans le trièdre OXYZ, qui peut avoir des formes très variées, mais qui satisfait toujours à la condition suivante : si (a, b, c) sont les coordonnées d'un point de Σ, tous les points intérieurs au parallélépipède formé par les 6 plans

$$X = 0, \quad X = a, \quad Y = 0, \quad Y = b, \quad Z = 0, \quad Z = c,$$

sont aussi intérieurs à Σ.

La série (4) est absolument convergente pour un système de valeurs x, y, z des variables, si le point de coordonnées $|x|$, $|y|$, $|z|$ est intérieur à la surface Σ, et divergente si ce point est à l'intérieur de Σ. L'ensemble des systèmes de valeurs de (x, y, z) tels que le point de coordonnées $|x|$, $|y|$, $|z|$ soit intérieur à Σ, constitue un domaine D où la somme $F(x, y, z)$ de la série (4) est une fonction holomorphe de ces variables, et à chaque point de Σ on peut encore faire correspondre un système de trois cercles de convergence *associés*.

Si l'on a une seconde série entière

$$(6) \qquad \sum b_{mnp} x^m y^n z^p,$$

il lui correspond une surface de séparation Σ', généralement différente de Σ. Toute demi-droite OL, située dans le trièdre OXYZ, rencontre Σ en un point M et Σ' en un point M'. Celui de ces deux points qui est le plus rapproché décrit une surface S, d'une forme analogue à celle des surfaces Σ et Σ'; si R et R' sont deux points de S, les trois coordonnées de R' ne peuvent être à la fois plus grandes ou plus petites que les coordonnées de R. L'ensemble des systèmes de valeurs des variables x, y, z tels que le point de coordonnées $|x|$, $|y|$, $|z|$ soit du même côté que l'origine par rapport à S, constitue un domaine D, à l'intérieur duquel les sommes des deux séries

$$F(x, y, z) = \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum b_{mnp} x^m y^n z^p$$

sont des fonctions régulières de x, y, z. Nous supposerons de plus que ces fonctions sont finies sur la frontière de ce domaine, et nous désignerons par M et N des limites supérieures de $|F|$ et de $|\Phi|$ respectivement. On peut toujours satisfaire à cette dernière condition en remplaçant, si c'est nécessaire, la surface S par une surface infiniment voisine.

Cela étant, considérons le système d'équations différentielles

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \Phi(x, y, z),$$

et soient (a, b, c) les coordonnées d'un point R de la surface S. On voit aisément, en reprenant la méthode des approximations successives, que les intégrales du système (7) qui s'annulent pour $x = 0$ sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de centre $x = 0$, dont le rayon est au moins égal au plus petit des trois nombres

$$a, \quad \frac{b}{\mathrm{M}}, \quad \frac{c}{\mathrm{N}}.$$

Pour avoir la limite la plus grande possible, *on doit prendre pour* R *le point d'intersection de la surface* S *avec la droite représentée par les équations*

$$\mathrm{Y} = \mathrm{MX}, \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{NX}.$$

En effet, si a, b, c sont les coordonnées de ce point, on a les égalités

$$a = \frac{b}{\mathrm{M}} = \frac{c}{\mathrm{N}} = h;$$

soient a', b', c' les coordonnées d'un autre point R' de S; on ne peut avoir à la fois

$$a' > a, \qquad b' > b, \qquad c' > c,$$

et par conséquent le plus petit des nombres a', $\frac{b'}{\mathrm{M}}$, $\frac{c'}{\mathrm{N}}$ ne peut être supérieur à h.

6. La règle précédente peut être étendue aux fonctions non analytiques. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas d'une équation unique du premier ordre

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

la fonction $f(x, y)$ est supposée continue à l'intérieur d'un contour C formé d'un arc de courbe Γ dans l'angle xOy, joignant un point A de Ox à un point B de Oy, et des segments OA, OB, et satisfait dans ce domaine à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif K tel que l'on ait

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < K|y'' - y'|,$$

(x, y') et (x, y'') désignant les coordonnées de deux points quelconques pris à l'intérieur ou sur le contour de C. La courbe Γ peut avoir une forme quelconque; mais, comme on peut toujours la remplacer par une courbe Γ' intérieure à Γ, nous supposerons que les coordonnées d'un point de Γ ne peuvent croître ou diminuer en même temps. Cela posé, soient M la limite supérieure de $|f(x, y)|$ dans le domaine précédent, et h l'abscisse du point de rencontre de l'arc de courbe Γ avec la droite $y = Mx$. *L'intégrale de l'équation* (8) *qui se réduit à zéro pour* $x = 0$ *est certainement continue lorsque x varie de* 0 *à h.*

On sait que M. E. Lindelöf a indiqué une autre expression de l'intervalle où cette intégrale est certainement continue (*Journal de Mathématiques*, 1894). Soient (a, b) les coordonnées d'un point de l'arc Γ et M_a le maximum de $|f(x, 0)|$ lorsque x varie de 0 à a; M_a est une fonction $\varphi(a)$ de l'abscisse a qui ne peut diminuer lorsque a augmente et qui est au plus égale à M. D'après M. E. Lindelöf, l'intégrale de l'équation (8), qui s'annule pour $x = 0$, est certainement continue dans l'intervalle $(0, \rho)$, ρ désignant le plus petit des deux nombres

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{K}\log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right).$$

Soit N le point de l'arc Γ pour lequel les deux nombres précédents sont égaux,

$$a = \frac{1}{K}\log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right);$$

ce point est à l'intersection de Γ avec la courbe qui a pour équation

$$(9) \qquad y = \frac{\varphi(x)}{K}(e^{Kx} - 1).$$

Tout autre point N' de coordonnées (a', b') sur l'arc Γ donnera pour ρ une limite plus petite que le point N. Cela est évident si $a' < a$; si a' est $> a$, on aura

$$b' \leqq b, \qquad M_{a'} \geqq M_a, \qquad \frac{1}{M_{a'}} \leqq \frac{1}{M_a}, \qquad \frac{b'}{M_{a'}} \leqq \frac{b}{M_a},$$

et par suite

$$\log\left(1 + \frac{Kb'}{M_{a'}}\right) < \log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right).$$

On aura donc la valeur de ρ *la plus favorable en prenant le point d'intersection* N *de la courbe* Γ *avec la courbe* (9).

Pour savoir laquelle des deux méthodes fournit le plus grand intervalle, il suffira de prendre les points d'intersection de Γ avec les deux courbes

$$y = Mx, \qquad y = \frac{\varphi(x)}{K}(e^{Kx} - 1),$$

et de prendre celui de ces deux points dont l'abscisse est la plus grande. Il est clair que le résultat dépend de la forme de l'arc Γ, et aussi de la fonction $\varphi(x)$.