BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur certaines transformations de contact

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 37-50

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__37_1>

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DE CONTACT;

PAR M. L. RAFFY.

Certaines transformations de contact permettent de déduire d'une surface *quelconque* une autre surface telle que les normales menées aux points correspondants de ces deux surfaces soient toujours dans un même plan. Cette propriété appartient à des transformations de contact plus générales, qu'il y aurait intérêt à déterminer, dans leur ensemble, mais dont nous ne ferons que donner quelques exemples.

I. — Équations générales.

1. Deux surfaces (S) et (S_1) étant supposées se correspondre point par point, soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M de la première; p, q, -1 les coefficients directeurs et a, b, c les cosinus directeurs de la normale en M. Représentons par des lettres affectées de l'indice 1 les éléments similaires relatifs au point M_1 qui correspond sur la surface (S_1) au point M.

La condition nécessaire et suffisante pour que les normales en M et en M_1 soient dans un même plan se présente d'elle-même sous les deux formes équivalentes

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & a & a_1 \\ y-y_1 & b & b_1 \\ z-z_1 & c & c_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & p & p_1 \\ y-y_1 & q & q_1 \\ z-z_1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1')$$

Si l'on veut, de plus, que le plan des deux normales passe constamment par un point fixe, comme dans l'inversion, on aura, en prenant ce point fixe pour origine des coordonnées, les deux conditions

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & a \\ y & y_1 & b \\ z & z_1 & c \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & a_1 \\ y & y_1 & b_1 \\ z & z_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

qui entraînent l'équation (1), *sauf si les points* M *et* M_1 *sont constamment en ligne droite avec l'origine.* L'équation (1), jointe à l'une des conditions (2) et (3), entraîne l'autre, *sauf si la normale de l'une des surfaces contient le point correspondant de l'autre.*

Si le plan des deux normales, au lieu de passer par un point fixe, reste parallèle à une droite fixe, que nous prendrons pour axe des z, on a les deux conditions

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & p \\ y-y_1 & q \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & p_1 \\ y-y_1 & q_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

qui entraînent l'équation (1′), *sauf si les points* M *et* M_1 *sont toujours sur une parallèle à l'axe des* z. L'équation (1′), jointe à l'une des conditions (4) et (5), entraîne l'autre, *sauf si la normale à l'une des surfaces contient le point correspondant de l'autre.*

Si les deux normales se coupent à distance finie et si leur point d'intersection est équidistant des deux points correspondants M et M_1, comme dans l'inversion, on a les deux conditions

$$\frac{a-a_1}{x-x_1}=\frac{b-b_1}{y-y_1}=\frac{c-c_1}{z-z_1}, \tag{6}$$

qui expriment que les surfaces (S) et (S_1) sont les deux nappes d'une enveloppe de sphères dépendant de deux paramètres.

II. — Transformations ponctuelles.

2. Soit une transformation ponctuelle, définie par les trois relations

$$x_1=x_1(x,y,z),\qquad y_1=y_1(x,y,z),\qquad z_1=z_1(x,y,z). \tag{1}$$

Il est facile de calculer les coefficients directeurs de la normale à la surface lieu du point (x_1, y_1, z_1). Si l'on pose d'une manière générale

$$\frac{D(u_1,v_1)}{D(u,v)}=\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}-\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u},$$

u et v étant deux quelconques des trois coordonnées x, y, z et u_1, v_1 deux quelconques des trois coordonnées x_1, y_1, z_1, on trouve

$$\left\{\begin{aligned}\lambda a_1 &= a\frac{D(y_1,z_1)}{D(y,z)}+b\frac{D(y_1,z_1)}{D(z,x)}+c\frac{D(y_1,z_1)}{D(x,y)},\\ \lambda b_1 &= a\frac{D(z_1,x_1)}{D(y,z)}+b\frac{D(z_1,x_1)}{D(z,x)}+c\frac{D(z_1,x_1)}{D(x,y)},\\ \lambda c_1 &= a\frac{D(x_1,y_1)}{D(y,z)}+b\frac{D(x_1,y_1)}{D(z,x)}+c\frac{D(x_1,y_1)}{D(x,y)}.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

En substituant ces valeurs de a_1, b_1, c_1 dans la condition (1) du n° **1**, on a une équation dont le premier membre est une forme quadratique par rapport aux trois paramètres a, b, c. Les coefficients de cette forme ne dépendent que de x, y, z comme x_1, y_1, z_1. En conséquence, pour que les normales aux deux surfaces (S) et (S_1) soient dans un même plan, *quelle que soit la sur-*

face (S), il faut et il suffit que les six coefficients de cette forme quadratique soient nuls. Cela fait six équations aux dérivées partielles du premier ordre entre les trois fonctions x_1, y_1, z_1 des variables x, y, z.

3. Sans entrer dans la discussion de ce système, on peut en indiquer une solution. Cherchons, en effet, les transformations ponctuelles dans lesquelles les deux normales appartiennent à un même plan, passant constamment par l'origine des coordonnées. La surface (S) étant supposée quelconque, la condition (2) du n° 1 doit se réduire à une identité : les points M et M_1 sont toujours en ligne droite avec l'origine. Posons donc

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \theta(x, y, z). \tag{3}$$

A l'aide des formules (2) nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\lambda a_1}{\theta} &= -(ax+by+cz)\theta'_x + a(x\theta'_x + y\theta'_y + z\theta'_z + \theta),\\ \frac{\lambda b_1}{\theta} &= -(ax+by+cz)\theta'_y + b(x\theta'_x + y\theta'_y + z\theta'_z + \theta),\\ \frac{\lambda c_1}{\theta} &= -(ax+by+cz)\theta'_z + c(x\theta'_x + y\theta'_y + z\theta'_z + \theta),\end{aligned}\right. \tag{4}$$

de sorte que la condition de concours des normales devient

$$(ax+by+cz)\begin{vmatrix} x & a & \theta'_x \\ y & b & \theta'_y \\ z & c & \theta'_z \end{vmatrix} = 0.$$

La surface (S) étant supposée quelconque, on doit avoir

$$\frac{\theta'_x}{x} = \frac{\theta'_y}{y} = \frac{\theta'_z}{z}, \tag{5}$$

c'est-à-dire que θ est une fonction de $x^2+y^2+z^2$ seulement. Quelle que soit d'ailleurs cette fonction, les formules

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \theta(x^2+y^2+z^2) \tag{6}$$

définissent une transformation ponctuelle dans laquelle les deux normales appartiennent à un même plan, passant constamment par l'origine. Quand θ varie en raison inverse de $x^2+y^2+z^2$, c'est une inversion. C'est d'ailleurs le seul cas où les formules (3) et (5) définissent une transformation dans laquelle les normales concourent en un point également distant de leurs points d'incidence respectifs.

Si l'on pose, en effet,

$$\mu = x\theta'_x + y\theta'_y + z\theta'_z + \theta, \qquad h = ax + by + cz,$$

les formules générales (10) donnent

$$\frac{a_1}{\mu a - h\theta'_x} = \frac{b_1}{\mu b - h\theta'_y} = \frac{c_1}{\mu c - h\theta'_z} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$
$$\Delta = \mu^2 - 2\mu h(a\theta'_x + b\theta'_y + c\theta'_z) + h^2(\theta'^2_x + \theta'^2_y + \theta'^2_z).$$

Mais, θ étant une fonction de

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2,$$

on trouve aisément

$$\mu = \theta + 2\rho\,\theta'(\rho), \quad \theta'^2_x + \theta'^2_y + \theta'^2_z = 4\rho\,\theta'^2(\rho), \quad a\theta'_x + b\theta'_y + c\theta'_z = 2h\,\theta'(\rho),$$

de sorte qu'il vient

$$(7) \qquad \Delta = [\theta + 2\rho\,\theta'(\rho)]^2 - 4h^2\theta'(\rho)[\theta + \rho\,\theta'(\rho)].$$

Les équations (6) du n° 1 deviennent ici

$$\frac{a_1 - a}{x} = \frac{b_1 - b}{y} = \frac{c_1 - c}{z}$$

En y substituant les expressions de a_1, b_1, c_1 et ayant égard aux équations (5), on trouve

$$\frac{a}{x}\left[\frac{\theta + 2\rho\,\theta'(\rho)}{\sqrt{\Delta}} - 1\right] = \frac{b}{y}\left[\frac{\theta + 2\rho\,\theta'(\rho)}{\sqrt{\Delta}} - 1\right] = \frac{c}{z}\left[\frac{\theta + 2\rho\,\theta'(\rho)}{\sqrt{\Delta}} - 1\right].$$

Comme on ne saurait avoir

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

que pour une sphère, on conclut

$$\theta + 2\rho\,\theta'(\rho) = \sqrt{\Delta},$$

ce qui exige, en raison de la valeur (7) trouvée pour $\sqrt{\Delta}$,

$$\theta + \rho\,\theta'(\rho) = 0.$$

Ainsi θ varie en raison inverse de ρ, et l'on a une inversion.

4. Comme cas limite de la transformation précédente, supposons que le plan des deux normales en M et en M_1 reste parallèle à l'axe des z, quelle que soit la surface (S). La condition (4) du n° 1 exige

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y$$

et l'équation générale (1') se réduit à

$$pq_1 - qp_1 = 0.$$

On en conclut que z_1 est une fonction, d'ailleurs arbitraire, de z et que *la transformation*

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = f(z)$$

est la seule transformation ponctuelle dans laquelle les deux normales appartiennent à un même plan, constamment parallèle à l'axe des z. On a en même temps une interprétation géométrique de la condition qui consiste dans l'évanouissement du déterminant fonctionnel de deux fonctions $z(x, y)$, $z_1(x, y)$.

Signalons encore une application des formules (2). Si l'on veut que les normales en M et M_1 soient constamment parallèles, *quelle que soit la surface* (S), on devra écrire que les trois expressions

$$bc_1 - cb_1, \quad ca_1 - ac_1, \quad ab_1 - ba_1,$$

qui, en vertu des relations (2), sont des formes quadratiques en a, b, c, ont tous leurs coefficients nuls. On arrive ainsi aux huit équations

$$\frac{D(y_1, z_1)}{D(y, z)} = \frac{D(z_1, x_1)}{D(z, x)} = \frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)},$$

$$\frac{D(y_1, z_1)}{D(z, x)} = \frac{D(z_1, x_1)}{D(x, y)} = \frac{D(x_1, y_1)}{D(y, z)} = 0,$$

$$\frac{D(y_1, z_1)}{D(x, y)} = \frac{D(z_1, x_1)}{D(y, z)} = \frac{D(x_1, y_1)}{D(z, x)} = 0,$$

dont l'intégration est facile. On ne trouve d'autre transformation qu'une homothétie, combinée avec une translation.

III. — Transformations de contact de seconde classe (à deux équations directrices).

5. Comme transformation de cette classe donnant lieu à des normales concourantes, on peut citer la *transformation apsidale*, qui, avec nos notations,

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \varpi = xx_1 + yy_1 + zz_1, \qquad \rho_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

a pour équations directrices

$$\rho_1 - \rho = 0, \qquad \varpi = 0,$$

si le point fixe est à l'origine des coordonnées.

Supposons que les deux équations directrices soient quelconques :

$$(1) \qquad \psi(x, y, z;\, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \psi_2(x, y, z;\, x_1, y_1, z_1) = 0. \qquad (2)$$

La théorie des transformations de contact fournit les six autres équations

$$(3) \qquad \mu p = \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial x}, \qquad -p_1 = \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \qquad (6)$$

$$(4) \qquad \mu q = \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \qquad -q_1 = \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2} \qquad (7)$$

$$(5) \qquad \mu = \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z}, \qquad 1 = \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1} \qquad (8)$$

où λ_1, λ_2 et μ sont trois inconnues auxiliaires. Éliminant ces trois paramètres entre les équations (3), (4) et (5), on obtient la relation

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} p & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} \\ q & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} \\ -1 & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, jointe aux équations (1) et (2), permet d'exprimer x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y, z, p, q.

En vertu de cette dernière condition, les équations (3), (4), (5) se réduisent à deux distinctes, les deux premières, par exemple; on en tire

$$\frac{\lambda_1}{q\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}}=\frac{\lambda_2}{p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-q\frac{\partial\psi_1}{\partial x}}=\frac{-\mu}{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}}=\frac{1}{\lambda}.$$

Substituant dans les équations (6), (7) et (8), nous trouvons

$$(6') \qquad -\lambda p_1=\left(q\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\left(q\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1},$$

$$(7') \qquad -\lambda q_1=\left(q\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}-\left(q\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1},$$

$$(8') \qquad \lambda=\left(q\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial z_1}-\left(q\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}.$$

La dernière de ces formules fait connaître λ et, par suite, μ, λ_1 et λ_2; les deux précédentes donnent p_1 et q_1. La transformation de contact est entièrement explicitée.

6. Pour exprimer que les normales aux points (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) sont dans un même plan, nous avons la condition générale (3) du n° **1**,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & p_1 & p \\ y-y_1 & q_1 & q \\ z-z_1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

qui prend ici la forme

$$(10) \qquad \left(q\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\begin{vmatrix} x-x_1 & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & p \\ y-y_1 & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & q \\ z-z_1 & \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1} & -1 \end{vmatrix}-\left(q\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-p\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\begin{vmatrix} x-x_1 & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & p \\ y-y_1 & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & q \\ z-z_1 & \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1} & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Il faut et il suffit pour notre objet qu'elle soit vérifiée par tous les systèmes de valeurs de p et q qui satisfont à l'équation (9). Imaginons, en effet, qu'on ait tiré x_1, y_1 et z_1 des équations (1) et (2) en fonction de x, y, z et d'un paramètre auxiliaire u, puis qu'on ait substitué leurs expressions dans les équations (9) et (10). Les premiers membres de ces équations contiennent x, y, z, p, q et u. Si donc l'équation (10) n'est pas une conséquence de l'équation (9), on pourra éliminer le paramètre u et l'on obtiendra une équation entre x, y, z, p, q : la surface lieu du point (x, y, z) ne sera pas *quelconque*.

En conséquence, il faudra exprimer que le premier membre de l'équation (9), qui est une fonction linéaire de p et q, divise celui de l'équation (10), qui est quadratique en p et q. Cela exige trois conditions. *Les fonctions* ψ_1 *et* ψ_2 *doivent donc vérifier trois équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre,* pour que les normales aux points correspondants des deux surfaces soient dans un même plan.

7. Nous allons indiquer une solution assez générale du problème. Cherchons des transformations de seconde classe pour lesquelles les deux normales appartiennent à un même plan, passant constamment par l'origine. Dans les conditions (2) et (3) du n° 1 remplaçons p, q, -1 par les seconds membres des équations (3), (4), (5), et p_1, q_1, -1 par ceux des équations (6), (7), (8). Nous trouvons deux relations qu'on peut écrire ainsi :

$$\lambda_1 \left\| \begin{matrix} x & x_1 & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} x & x_1 & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\lambda_1 \left\| \begin{matrix} x & x_1 & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} x & x_1 & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Elles exigent seulement que les coefficients de λ_1 et de λ_2 dans les premiers membres soient proportionnels : supposons-les *nuls tous les quatre*. Nous avons ainsi deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes,

$$(yz_1 - zy_1)\frac{\partial\psi}{\partial x} + (zx_1 - xz_1)\frac{\partial\psi}{\partial y} + (xy_1 - yx_1)\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

$$(yz_1 - zy_1)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + (zx_1 - xz_1)\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + (xy_1 - yx_1)\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = 0,$$

auxquelles doit satisfaire chacune des fonctions ψ_1 et ψ_2. Leurs intégrales générales sont respectivement

$$\psi(x^2 + y^2 + z^2,\ xx_1 + yy_1 + zz_1;\ x_1,\ y_1,\ z_1),$$

$$\psi(x,\ y,\ z;\ xx_1 + yy_1 + zz_1,\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2),$$

les symboles ψ désignant des fonctions arbitraires des cinq arguments sur lesquels ils portent. On en conclut que ψ est une fonction arbitraire de ρ, ϖ et ρ_1. Les équations directrices sont donc

$$\psi_1(\rho, \varpi, \rho_1) = 0, \qquad \psi_2(\rho, \varpi, \rho_1) = 0.$$

Elles expriment que deux des trois expressions ρ, ϖ, ρ_1 sont des fonctions arbitraires de la troisième, de sorte qu'on peut prendre, par exemple,

$$\psi_1 = \rho_1 - f(\rho) = 0, \qquad \psi_2 = \varpi - \varphi(\rho) = 0.$$

On reconnaît alors aisément que le déterminant qui forme le premier membre de l'équation (9) et les deux déterminants du troisième ordre qui figurent au premier membre de l'équation (10) sont tous les trois proportionnels à

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x_1 & p \\ y & y_1 & q \\ z & z_1 & -1 \end{vmatrix},$$

de sorte que l'équation (10) est bien une conséquence de l'équation (9).

Pour définir géométriquement la transformation, remarquons que le point x_1, y_1, z_1 est à l'intersection des trois surfaces

$$\rho_1 - f(\rho) = 0, \qquad \varpi - \varphi(\rho) = 0, \qquad \Delta = 0.$$

La dernière est un plan passant par l'origine O et par la normale MN au point (x, y, z) de la surface (S). La seconde est aussi un plan (P)

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - \varphi(\rho) = 0,$$

perpendiculaire à la droite OM. La première est une sphère de centre O

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - f(\rho) = 0.$$

Il y a deux points M_1, qui sont à l'intersection de cette sphère avec la droite commune aux plans $\Delta = 0$ et (P), droite qui est perpendiculaire à OM. Dans la transformation apsidale, le rayon de la sphère est égal à ρ, et la distance d du plan (P) à l'origine constamment nulle; ici le rayon de la sphère est égal à $\sqrt{f(\rho)}$ et la distance d à $\varphi(\rho) : \sqrt{\rho}$.

IV. — Transformations de contact de première classe (à une seule équation directrice).

8. Comme transformations de cette classe donnant lieu à des normales concourantes, on peut citer la *transformation podaire*, par laquelle on passe d'une surface à sa podaire; dans la *dilatation*, ou passage d'une surface aux surfaces parallèles, les normales correspondantes sont confondues.

La théorie des transformations de contact, dans le cas d'une seule équation directrice

$$\psi(x, y, z;\, x_1, y_1, z_1) = 0, \tag{1}$$

donne, comme on sait,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x} + p\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = 0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Substituant ces valeurs de p, q, p_1 et q_1 dans l'équation générale (1′) du n° 1 qui exprime que les normales aux points $M(x, y, z)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ sont dans un même plan, on trouve

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ y - y_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y_1} \\ z - z_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z_1} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, homogène et du second degré, qui détermine, avec la fonction ψ, l'ensemble des transformations de contact de première classe, dans lesquelles les normales aux points correspondants de deux surfaces sont constamment dans un même plan; elle est intégrable par les méthodes classiques. Les transformations mentionnées ci-dessus correspondent à des solutions extrêmement particulières de cette équation. Posons, en effet,

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \varpi = xx_1 + yy_1 + zz_1, \qquad \rho_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Si l'on prend

$$(4) \qquad \psi = \varpi - \rho_1 = 0,$$

on obtient la transformation podaire, le point fixe étant à l'origine.

A l'équation directrice

$$(5) \qquad \psi = \rho + \rho_1 - 2\varpi + \text{const.} = 0$$

correspond la dilatation.

9. Il est facile de généraliser ces résultats. Donnons-nous, en effet, comme équation directrice

$$(6) \qquad \psi = \varpi - f(\rho_1) = 0,$$

la fonction f étant arbitraire. On déduit de là

$$(7) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = x_1, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = x - 2x_1 f'(\rho_1)$$

et des expressions analogues pour les autres dérivées. L'équation (3) est vérifiée. Des relations (2) et (7) on déduit aisément

$$z_1 = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\varphi\left(\frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right), \qquad x_1 = -pz_1, \qquad y_1 = -qz_1.$$

Posant, comme plus haut,

$$h = ax + by + cz,$$

nous obtenons les expressions plus symétriques

$$(8) \qquad x_1 = a\,\varphi(h), \qquad y_1 = b\,\varphi(h), \qquad z_1 = c\,\varphi(h).$$

La transformation consiste donc à mener par l'origine des parallèles aux normales de la surface (S) en ses divers points M et à porter sur chacune de ces parallèles une longueur qui est une fonction déterminée, mais arbitraire [1], de la distance de l'origine

---

[1] Si la longueur φ, au lieu de dépendre de h, reste absolument quelconque, les directions des tangentes à la surface (S), auxquelles correspondent sur (S_1) des directions respectivement perpendiculaires, sont, comme dans la représentation sphérique, les directions asymptotiques. C'est ce qui résulte de l'identité

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \varphi\,(dx\,da + dy\,db + dz\,dc),$$

qui a lieu, quelle que soit la fonction φ.

au plan tangent en M. Pour $\varphi(h) = 1$, on a la représentation sphérique de Gauss; pour $\varphi(h) = h$, la transformation podaire. Quelle que soit cette fonction, *le plan des normales correspondantes passe constamment par l'origine,* comme on s'en assure aisément au moyen des relations (7), comparées aux conditions (2) et (3) du n° 1. Ce résultat découle d'ailleurs d'un autre, plus général, que nous allons établir.

10. Proposons-nous de *définir toutes les transformations de contact à une seule équation directrice pour lesquelles les deux normales correspondantes appartiennent à un plan passant constamment par l'origine.* Les équations (2) et (3) du n° 1 s'écrivent ici

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ y & y_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ z & z_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & x_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ y & y_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial y_1} \\ z & z_1 & \dfrac{\partial\psi}{\partial z_1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Ce sont là deux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires et homogènes que nous avons déjà rencontrées au paragraphe III. Leur intégrale générale est

$$(11)\qquad G(x^2+y^2+z^2,\ xx_1+yy_1+zz_1,\ x_1^2+y_1^2+z_1^2),$$

c'est-à-dire une fonction arbitraire de ρ, de ϖ et de ρ_1. En égalant G à zéro et résolvant [1] par rapport à ϖ, on obtient une équation directrice de la forme

$$(12)\qquad \psi = \varpi - f(\rho, \rho_1) = 0,$$

où la fonction f est arbitraire et qui résout le problème.

---

[1] Il n'y a pas lieu de supposer la fonction G indépendante de ϖ, car l'équation $G = 0$ rentrerait dans le type

$$\psi = f(\varphi, \varphi_1) = 0,$$

où φ est une fonction de x, y, z et φ_1 une fonction de x_1, y_1, z_1. Or une équation de ce type ne peut être prise comme équation directrice (supposée unique) d'une transformation de contact, parce que le premier groupe des formules (2), celui de gauche, ne contient pas x_1, y_1, z_1, et le second groupe, celui de droite, ne contient pas x, y, z.

Si l'on prend, en particulier,

$$\psi = \varpi - f(\rho) f_1(\rho_1), \tag{13}$$

on obtient une transformation qui est le produit de la transformation ponctuelle définie par les équations (12) du paragraphe II

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{z_0}{z} = \theta(x^2 + y^2 + z^2)$$

et de la transformation définie dans le présent paragraphe par les équations (8),

$$\frac{x_1}{a_0} = \frac{y_1}{b_0} = \frac{z_1}{c_0} = \varphi(h_0), \qquad h_0 = a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 z_0.$$

11. Voici une autre solution de l'équation (3), du même ordre de généralité que la solution (12). Posons

$$u = lx + l_1 x_1, \qquad v = ly + l_1 y_1, \qquad w = lz + l_1 z_1, \tag{14}$$

l_1, l_2 étant deux constantes et prenons pour ψ une fonction arbitraire de u, v, w,

$$\psi = f(u, v, w). \tag{15}$$

Nous trouvons immédiatement

$$\frac{1}{l}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{l_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = f'_u, \qquad \frac{1}{l}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{l_1}\frac{\partial\psi}{\partial y_1} = f'_v, \qquad \frac{1}{l}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{l_1}\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = f'_w,$$

de sorte que *les normales correspondantes sont constamment parallèles,* quelque forme qu'on attribue à la fonction f, quelques valeurs qu'on assigne aux constantes l, l_1, la valeur zéro étant exclue. Les équations (14) et (15), rapprochées des équations générales (2), donnent

$$lx + l_1 x_1 = X(p, q), \qquad ly + l_1 y_1 = Y(p, q), \qquad lz + l_1 z_1 = Z(p, q);$$
$$\frac{p_1}{l_1} = \frac{p}{l}, \qquad \frac{q_1}{l_1} = \frac{q}{l}.$$

Cette transformation, ainsi que les diverses autres qui ont été signalées dans les pages précédentes, mériterait peut-être une étude détaillée.