BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DE MONTESSUS

Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 101-108

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__101_1>

RECHERCHE EFFECTIVE DES RACINES RÉELLES DES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES;

PAR M. R. DE MONTESSUS (1).

Soit à résoudre l'équation

$$o = F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = 1 - \frac{\alpha\beta}{1\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 - \ldots.$$

La série $F(\alpha, \beta, \gamma, -x)$ converge si $-1 < x < 1$; elle prend une valeur positive si $x < 0$; nous avons donc simplement à calculer les racines comprises entre o et 1.

(1) *Cf.* KLEIN, *Mathematische Annalen*, t. XXXVII. — HURWITZ, *Ibid.*, t. XXXVIII et XLIV. — HILBERT, *Journal de Crelle*, t. CIII. — STIELTJES, *Comptes rendus*, t. C. — R. DE MONTESSUS, *Ibid.*, 1909.

Rappelons quelques formules [1] :

(I) $$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$$

(II) $$\alpha(1-x) F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) + [\gamma - 2\alpha - (\beta-\alpha)x] F(\alpha, \beta, \gamma, x) - (\gamma-\alpha) F(\alpha-1, \beta, \gamma, x) = 0,$$

(III) $$\gamma[\alpha - (\gamma-\beta)x] F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \alpha\gamma(1-x) F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x) = 0,$$

(IV) $$\gamma(\gamma-1)(x-1) F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) + \gamma[\gamma - 1 - (2\gamma-\alpha-\beta-1)x] \times F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma-\alpha)(\gamma+\beta)x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x) = 0,$$

(V) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$$

(VI) $$F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\beta x}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x).$$

Nous allons appliquer à l'équation proposée le théorème de Sturm, sous la forme généralisée qu'en donnent les Traités d'Algèbre moderne; il suffit de supposer que le premier membre de l'équation proposée est continu, ce qui a lieu ici, dans les limites de convergence de la série.

Nous aurons à faire diverses hypothèses sur l'ordre des grandeurs réciproques et sur les signes de α, β, γ.

Hypothèse I. — $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < \gamma$.

Ici, $1 > \frac{\alpha\beta}{1\gamma}$ et, *a fortiori*, x étant moindre que 1,

(1) $$1 > \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x;$$

considérons les deux termes consécutifs

$$u_{2n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+2n-1)}{1.2.3\ldots 2n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+2n-1)} x^{2n},$$

$$u_{2n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2n-1)(\alpha+2n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+2n-1)(\beta+2n)}{1.2.3\ldots 2n(2n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}$$

---

[1] Gauss, *Werke*, B. III : *Disquisitiones*, etc.

de la série; leur rapport a pour expression

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{(\alpha+2n)(\beta+2n)}{(1+2n)(\gamma+2n)}x;$$

or, puisque

$$\frac{\alpha}{1} < 1, \qquad \frac{\beta}{\gamma} < 1,$$

on a aussi

$$\frac{\alpha+2n}{1+2n} < 1, \qquad \frac{\beta+2n}{\gamma+2n} < 1 \qquad (\alpha < 1, \quad \beta < \gamma)$$

et, x étant moindre que 1,

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{\alpha+2n}{1+2n} + \frac{\beta+2n}{\gamma+2n}x < 1,$$

c'est-à-dire

(2) $$u_{2n+1} < u_{2n};$$

la série pouvant s'écrire

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = {} & \left(1 - \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x\right) \\ & + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2n} - u_{2n+1}) + \ldots, \end{aligned}$$

il résulte des inégalités (1) et (2) que l'équation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = 0$$

n'a pas de racines réelles dans son domaine de convergence si $\alpha < 1$, $\beta < \gamma$; alors, quel que soit x, compris entre -1 et $+1$,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, -x) > 0.$$

Hypothèse II. — $0 < \alpha < 1$, $\beta > \gamma > 0$.

Théorème. — ***La suite***

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{c} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \dfrac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \\ F(\alpha, \beta, \gamma+1, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma+2, x), \quad \ldots, \quad F(\alpha, \beta, \gamma+p, x), \\ \gamma+p-1 < \beta < \gamma+p \end{array} \right.$$

est une suite de Sturm, sous réserve de changer les signes de quelques-uns de ses termes.

Nous venons de voir que $F(\alpha, \beta, \gamma + p, x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle de convergence $(-1, +1)$ de la série.

On sait de plus (IV) que

$$
\text{(A)} \quad \begin{aligned}
&(\gamma + h)(\gamma + h - 1)(x - 1) F(\alpha, \beta, \gamma + h - 1, x) \\
&+ (\gamma + h)[\gamma + h - 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 2h - 1)x] F(\alpha, \beta, \gamma + h, x) \\
&+ (\gamma - \alpha + h)(\gamma - \beta + h) x F(\alpha, \beta, \gamma + h + 1, x) = 0;
\end{aligned}
$$

établissons maintenant une relation entre

$$
F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x);
$$

d'après la formule (I), on a

$$
\frac{\gamma}{\alpha\beta} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x);
$$

donc, en vertu de l'équation (V),

$$
\begin{aligned}
-\frac{x}{\gamma - 1} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) &= -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma + 1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x) \\
&= F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x);
\end{aligned}
$$

exprimant $F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x)$ à l'aide de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x)$, par la formule (IV), il viendra

$$
\text{(B)} \quad \begin{aligned}
&\gamma(1 - x) F'(\alpha, \beta, \gamma, x) + \gamma(\gamma - \alpha - \beta) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\
&\qquad - (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) = 0.
\end{aligned}
$$

De cette relation, on déduit sans peine une relation entre

$$
F'(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x);
$$

on a, en effet, d'après la relation (IV),

$$
\begin{aligned}
&(\gamma + 1)\gamma(1 - x) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\
&\quad = (\gamma + 1)[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x] F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) \\
&\quad + (\gamma - \alpha + 1)(\gamma - \beta + 1) x F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x);
\end{aligned}
$$

portant cette valeur de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans (A), il viendra

$$
\text{(C)} \quad \begin{aligned}
&(\gamma + 1)\gamma(1 - x)^2 F'(\alpha, \beta, \gamma, x) \\
&\quad - [\alpha\beta - (\gamma - \alpha - \beta)\gamma^2 + (\gamma - \alpha - \beta)(\gamma + 1)(2\gamma - \alpha - \beta + 1)x] \\
&\quad \times F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) + (\gamma - \alpha - \beta)(\gamma - \alpha + 1)(\gamma - \beta + 1)x \\
&\qquad\qquad \times F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x) = 0.
\end{aligned}
$$

En vertu des relations (A), (B) et (C), la suite (S_1) est bien une suite de Sturm.

HYPOTHÈSE III. — $\alpha > 1, \quad \beta > \gamma > 0.$

THÉORÈME. — *La suite*

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{c} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \dfrac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \\ F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha - 2, \beta, \gamma, x), \quad \ldots, \quad F(\alpha - i, \beta, \gamma, x), \\ F(\alpha - i, \beta, \gamma + 1, x), \quad F(\alpha - i, \beta, \gamma + 2, x), \quad \ldots, \quad F(\alpha - i, \beta, \gamma + h, x), \\ 0 < \alpha - i < 1, \qquad \gamma + h - 1 < \beta < \gamma + h \end{array} \right.$$

est une suite de Sturm, sous réserve de changer les signes de quelques-uns de ses termes, ces changements résultant d'ailleurs du simple examen des termes de la suite (¹).

Il nous suffit d'établir qu'il existe une relation de récurrence linéaire entre chacun des termes de cette suite.

Les formules (II) et (VI) donnent

$$\frac{\gamma}{\alpha\beta} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x),$$

$$\frac{\beta x}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x) = F(\alpha + 1, \beta, \gamma) - F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

donc

$$\frac{x}{\alpha} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha + 1, \beta, \gamma) - F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

eu égard à la relation (II),

$$\begin{aligned} &\alpha(x - 1) F(\alpha + 1, \beta, \gamma) \\ &\quad = [\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x] F(\alpha, \beta, \gamma, x) - (\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x); \end{aligned}$$

on en déduit

$$(D) \qquad \begin{aligned} &(x - 1)x F'(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ &\quad - (\gamma - \alpha - \beta) F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x). \end{aligned}$$

Mais (II) donne

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)(x - 1) F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= [\gamma - 2\alpha + 2 - (\beta - \alpha + 1)x] \\ &\quad \times F(\alpha - 1, \beta, \gamma) + (\gamma - \alpha + 1) F(\alpha - 2, \beta, \gamma, x). \end{aligned}$$

(¹) On pourra voir à ce propos : R. DE MONTESSUS, *De l'usage pratique du théorème de Sturm* (*N. A.*, 1909).

Substituons dans (D); il vient

$$\text{(E)}\quad (x-1)^2(\alpha-1)x\frac{dF}{dx}$$
$$= \big\{[(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)-\beta(\gamma-2\alpha+2)]-\beta(\gamma-\beta-1)x\big\}$$
$$\times F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)-(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+1)F(\alpha-2,\beta,\gamma,x);$$

ensuite la formule (II) donne

$$\text{(F)}\qquad (\alpha-2)(x-1)F(\alpha-1,\beta,\gamma)$$
$$=[\gamma-2\alpha+4-(\beta-\alpha+2)x]$$
$$\times F(\alpha-2,\beta,\gamma,x)-(\gamma-\alpha+2)F(\alpha-3,\beta,\gamma,x),$$

et ainsi de suite. Si $\beta<\gamma$, nous arrêterons la suite à

$$F(\alpha-i,\beta,\gamma,x),\qquad 0<\alpha-i<1;$$

sinon, nous prendrons (S_2) en entier.

Il nous faut alors de nouvelles relations de récurrence.

D'après l'équation (III) nous avons

$$\gamma[\alpha-i-(\gamma-\beta)x]F(\alpha-i,\beta,\gamma,x)-(\alpha-i)\gamma(1-x)$$
$$\times F(\alpha-i+1,\beta,\gamma,x)+(\gamma-\alpha+i)(\gamma-\beta)x\,F(\alpha-i,\beta,\gamma+1,x)=0$$

et, d'après la relation (IV),

$$\text{(G)}\quad (\gamma+p)(\gamma+p-1)(x-1)F(\alpha-i,\beta,\gamma+p-1,x)$$
$$+(\gamma+p)[\gamma+p-1-(2\gamma+2p-\alpha+i-\beta-1)x]$$
$$\times F(\alpha-i,\beta,\gamma+p,x)+(\gamma+p-\alpha+i)(\gamma+p-\beta)x$$
$$\times F(\alpha-i,\beta,\gamma+p+1,x)=0,$$

la proposition est démontrée.

Hypothèse IV. — L'un au moins des nombres α,β,γ est négatif.

Nous avons la formule bien connue

$$(x-x^2)\frac{d^2F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{dx^2}$$
$$+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,x)}{dx}-\alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma,x)=0$$

et, par dérivation,

$$(x-x^2)\frac{d^3F}{dx^3}+[1+\gamma-(\alpha+\beta+3)x]\frac{d^2F}{dx^2}-(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\frac{dF}{dx}=0,$$

....

Nous prendrons

$$(\sigma)\qquad F,\quad \frac{dF}{dx},\quad \frac{d^2F}{dx^2},\quad \frac{d^3F}{dx^3},\quad \ldots,\quad \frac{d^nF}{dx^n}$$

comme premiers termes d'une suite de Sturm; nous nous arrêterons à l'indice n, défini comme suit.

On a

$$(1)\qquad \frac{dF}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$$

d'où

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2 F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+1, x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^nF}{dx^n} = \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x);$$

et nous choisirons n de manière qu'on ait

$$\alpha+n > 0,\qquad \beta+n > 0,\qquad \gamma+n > 0;$$

nous prolongerons alors la suite (σ) comme il suit :

1° Si $\alpha+n > 1$, nous lui adjoindrons

$$(\sigma_1)\qquad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha+n-1, \beta+n, \gamma+n, x),\\ F(\alpha+n-2, \beta+n, \gamma+n, x),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F(\alpha+n-p, \beta+n, \gamma+n, x),\\ \qquad 0 < \alpha+n-p < 1; \end{array}\right.$$

dans le cas où $p+n$ est $< \gamma+n$, (σ), (σ_1) est une suite de Sturm complète, car $F(\alpha+n-p, \beta+n, \gamma+n, x)$ ne change pas de signe quand x varie de -1 à $+1$. Si $\beta+n > \gamma+n$, il faudra prolonger (σ_1) par la suite

$$(\sigma_2)\qquad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha+n-p, \beta+n, \gamma+n+1, x),\\ F(\alpha+n-p, \beta+n, \gamma+n+2, x),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F(\alpha+n-p, \beta+n, \gamma+n+q, x),\\ \gamma+n+q-1 < \beta+n < \gamma+n+q \end{array}\right.$$

et la suite (σ_1), (σ_2), (σ_3) sera une suite de Sturm complète.

2° Si $\alpha+n < 1$, mais $\beta+n > \gamma+n$, nous adjoindrons à (σ)

la suite

$$(\sigma_3)\qquad \begin{cases} F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n+1,\ x), \\ F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n+2,\ x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n+k,\ x), \\ \gamma+n+k-1<\beta+n<\gamma+n+k, \end{cases}$$

et (σ), (σ_3) sera une suite de Sturm complète.

3° Enfin, si $\alpha+n<1$, $\beta+n<\gamma+n$, la série

$$F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ x)$$

ne change pas de signe quand x varie de -1 à $+1$, et (σ) est une suite de Sturm complète pour $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Nous avons écrit les relations de récurrence liant les termes de (σ). Les relations de récurrence qui lient (σ) à (σ_1) ou à (σ_3) s'écrivent sans peine; celles qui lient (σ_1) à (σ_2) également.

Les suites de Sturm indiquées résolvent le problème du calcul effectif des racines de la série hypergéométrique.