BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

Sur la représentation uniforme des surfaces algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 244-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__244_0>

SUR LA REPRÉSENTATION UNIFORME DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

I. — L'EXTENSION DU THÉORÈME DE M. BOREL.

1. On sait que le théorème de M. Borel sur l'impossibilité d'une identité de la forme

$$c_1 e^{H_1(z)} + c_2 e^{H_2(z)} + c_3 e^{H_3(z)} + \ldots + c_m e^{H_m(z)} = 0, \tag{1}$$

où les $H_1(z), H_2(z), \ldots, H_m(z)$ désignent des fonctions entières telles qu'aucune différence $H_i(z) - H_j(z)$ ne soit constante, a rendu des services considérables à la théorie des fonctions d'une variable indépendante ([1]) (*voir*, par exemple, ma thèse de doctorat : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes*, Paris, 1906, et ma communication insérée aux *Atti del IV° Congresso internazionale dei Matematici*, Roma, 6-11 aprile 1908).

Il est clair que le même théorème existe pour les fonctions de deux variables indépendantes, et l'identité

$$c_1 e^{H_1(x,y)} + c_2 e^{H_2(x,y)} + c_3 e^{H_3(x,y)} + \ldots + c_m e^{H_m(x,y)} = 0 \tag{2}$$

entraîne la nullité des coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$, si les fonctions $H_i(x, y)$ sont des fonctions entières de deux variables complexes indépendantes; nous supposons encore, bien entendu, que aucune différence $H_i - H_j$ ne soit une constante.

L'extension du théorème de M. Borel au cas de deux variables indépendantes s'obtient immédiatement, puisqu'une identité de la forme (2) se transforme en une identité de M. Borel si nous attribuons à y, par exemple, une valeur quelconque, ou bien si nous remplaçons y par une fonction entière de x.

([1]) Les coefficients c_i sont ou bien des polynomes ou bien des fonctions entières d'ordre de grandeur inférieur à celui des exponentielles.

II. — Les surfaces unicursales et les représentations uniformes transcendantes.

2. Les surfaces unicursales, admettant des représentations paramétriques *rationnelles*, sont aussi susceptibles de représentations uniformes *transcendantes;* cela est évident, parce que nous pouvons remplacer les deux paramètres de la représentation rationnelle par des fonctions uniformes quelconques d'autres variables. Nous savons bien que la réciproque n'est pas vraie; nous avons, par exemple, les surfaces hyperelliptiques qui admettent des représentations uniformes de deux paramètres sans être unicursales. (Les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres : *voir* É. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* t. II, p. 439.)

Je me propose de signaler ici une classe très étendue de représentations uniformes transcendantes, dont l'existence entraîne l'existence de représentations rationnelles et montre que la surface est unicursale. Démontrer à l'aide d'une représentation transcendante que la surface est unicursale, c'est là un fait évidemment intéressant, car il ne s'agit pas, bien entendu, de quelques cas élémentaires où la représentation transcendante devient, moyennant une substitution visible, immédiatement rationnelle en fonction de deux variables indépendantes.

3. Supposons que la surface ayant l'équation algébrique

$$f(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

admette la représentation paramétrique uniforme

$$\left\{\begin{aligned} x &= p_1(u, v)e^{Q_1(u,v)} + p_2(u, v)e^{Q_2(u,v)} + \ldots + p_n(u, v)e^{Q_n(u,v)} + p_0(u, v), \\ y &= q_1(u, v)e^{Q_1(u,v)} + q_2(u, v)e^{Q_2(u,v)} + \ldots + q_n(u, v)e^{Q_n(u,v)} + q_0(u, v), \\ z &= r_1(u, v)e^{Q_1(u,v)} + r_2(u, v)e^{Q_2(u,v)} + \ldots + r_n(u, v)e^{Q_n(u,v)} + r_0(u, v), \end{aligned}\right. \tag{4}$$

les $p_i(u, v)$, $q_i(u, v)$, $r_i(u, v)$ désignant des fonctions rationnelles des u et v et les exposants $Q_i(u, v)$ des fonctions *entières* quelconques; c'est visiblement une représentation transcendante et uniforme.

Nous supposons en outre que les exposants $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ jouissent de la propriété suivante : *il n'y a aucune relation de la forme*

$$(5) \qquad \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 + \ldots + \alpha_n Q_n + \alpha_0 = 0,$$

les coefficients α étant constants et entiers.

En substituant dans l'équation de la surface les valeurs (4) de la représentation uniforme, nous obtenons une identité telle que

$$(6) \qquad \sum_k P_k(u, v) e^{\mu_{k1} Q_1 + \mu_{k2} Q_2 + \ldots + \mu_{kn} Q_n} = 0,$$

le premier membre étant la somme d'un certain nombre de termes exponentiels de la forme indiquée dans cette formule (6), les $P_k(u, v)$ désignant des polynomes en u et v et les $\mu_{k1}, \mu_{k2}, \ldots, \mu_{kn}$ des nombres entiers. D'après l'hypothèse faite ci-dessus sur les exposants Q_i aucun exposant de la formule (6) n'est une constante et il n'est pas possible que la différence de deux exposants de la même formule soit une constante; donc l'égalité (6) a toutes les propriétés nécessaires pour l'application de l'extension du théorème de M. Borel, indiquée dans le premier paragraphe de ce travail, et par conséquent, nous obtenons les identités suivantes :

$$(7) \qquad P_1(u, v) = 0, \qquad P_2(u, v) = 0, \qquad P_3(u, v) = 0, \qquad \ldots.$$

Or, ce résultat nous fait voir que l'identité (6) subsiste quelles que soient les quantités Q_i, et, par conséquent, l'équation de la surface sera vérifiée par les valeurs (4), quelles que soient les fonctions $e^{Q_1}, e^{Q_2}, \ldots, e^{Q_n}$: en effet, les polynomes $P_k(u, v)$ sont tout à fait indépendants de ces exponentielles. En particulier, nous pouvons remplacer les $e^{Q_1}, e^{Q_2}, e^{Q_3}, \ldots, e^{Q_n}$ par des polynomes arbitraires en u et v ou par des fonctions rationnelles en u et v : $R_1(u, v), R_2(u, v), \ldots, R_n(u, v)$; les équations (4) prennent alors la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} x = p_1(u, v) R_1(u, v) + p_2(u, v) R_2(u, v) + \ldots \\ \qquad\qquad + p_n(u, v) R_n(u, v) + p_0(u, v), \\ y = q_1(u, v) R_1(u, v) + q_2(u, v) R_2(u, v) + \ldots \\ \qquad\qquad + q_n(u, v) R_n(u, v) + q_0(u, v), \\ z = r_1(u, v) R_1(u, v) + r_2(u, v) R_2(u, v) + \ldots \\ \qquad\qquad + r_n(u, v) R_n(u, v) + r_0(u, v). \end{cases}$$

Elles donnent des représentations rationnelles de la surface, qui sera, par conséquent, *unicursale*.

4. La restriction imposée aux exposants Q_i dans le numéro précédent peut être supprimée; c'est-à-dire que nous n'excluons pas les cas où il existe entre les Q_i des relations de la forme (5) ou bien de la forme

$$(8') \qquad e^{\alpha_0}(e^{Q_1})^{\alpha_1}(e^{Q_2})^{\alpha_2}(e^{Q_n})^{\alpha_n} = 1.$$

Si le nombre des relations distinctes de la forme (5) est égal ou supérieur à n, les exposants seront, en général, des constantes et, alors, la représentation (4) sera visiblement rationnelle.

Maintenant, les annulations des exposants et les réductions des termes de l'identité (6) sont bien possibles et correspondent à des relations linéaires de la forme (5) ou bien à des relations algébriques de la forme (8') entre les exponentielles e^{Q_i}. Ces équations algébriques entre les e^{Q_i} présentent deux cas : 1° ou bien, leur nombre étant égal ou supérieur à n, elles déterminent complètement les exponentielles e^{Q_i} qui seront, par conséquent, des constantes; 2° ou bien, leur nombre étant inférieur à n, elles laissent libres un certain nombre ρ de ces quantités e^{Q_i}; alors les $n-\rho$ quantités Q_i seront des fonctions linéaires des ρ autres de la forme

$$(9) \qquad Q_i = \frac{b_1}{k}Q_1 + \frac{b_2}{k}Q_2 + \ldots + \frac{b_\rho}{k}Q_\rho \qquad (i = \rho+1, \rho+2, \ldots),$$

les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_\rho, k$ étant entiers et le dénominateur k étant le même dans les valeurs de tous les exposants Q_{p+1}, $Q_{p+2}, \ldots, Q_n$.

Nous aurons aussi

$$e^{Q_i} = \left(e^{\frac{Q_1}{k}}\right)^{b_1}\left(e^{\frac{Q_2}{k}}\right)^{b_2}\cdots\left(e^{\frac{Q_\rho}{k}}\right)^{b_\rho}$$

ou bien

$$e^{Q_i} = A_1^{b_1}A_2^{b_2}\ldots A_\rho^{b_\rho} \qquad (i = \rho+1, \rho+2) \ldots, n),$$

en posant

$$e^{\frac{Q_1}{k}} = A_1, \qquad e^{\frac{Q_2}{k}} = A_2, \qquad e^{\frac{Q_\rho}{k}} = A_\rho.$$

L'équation de la surface sera vérifiée par les expressions (4), quelles que soient les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$. Si donc nous remplaçons ces quantités par des fonctions rationnelles des u et v, les quantités $e^{Q_1}, e^{Q_2}, \ldots, e^{Q_n}$ seront aussi des fonctions rationnelles des mêmes variables, comme le montrent les formules

$$e^{Q_1} = A_1^k, \quad e^{Q_2} = A_2^k, \quad \ldots, \quad e^{Q_\rho} = A_\rho^k,$$
$$e^{Q_i} = A_1^{h_1} A_2^{h_2} \ldots A_\rho^{h_\rho} \qquad (i = \rho + 1, \rho + 2, \ldots, n),$$

et la surface sera unicursale.

En ce qui concerne l'identité (6), nous remarquons qu'il y a deux cas à distinguer : ou bien elle peut, moyennant les réductions, prendre une forme ayant toutes les exponentielles constantes, et alors nous n'avons besoin d'y faire aucune substitution de fonctions transcendantes par des fonctions rationnelles; ou bien, après toutes les réductions possibles, il y restera des exponentielles transcendantes que nous pouvons remplacer par des fonctions rationnelles de u et v.

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Toute surface, admettant pour les coordonnées de ses points une représentation uniforme transcendante de la forme (4), *est unicursale.*

III. — Généralisation du théorème.

5. Si nous tenons compte de la forme générale du théorème de M. Borel, nous pouvons généraliser beaucoup notre théorème ci-dessus énoncé.

Ainsi, l'identité (2) (n° 1) entraîne la nullité de tous les coefficients c_i dans le cas où, ces coefficients étant des fonctions entières de genre fini, les exponentielles sont des fonctions entières de genre infini. En appliquant, par exemple, ce cas du théorème de M. Borel, nous obtenons le théorème suivant :

Si une surface algébrique admet une représentation paramétrique uniforme telle que

$$x = g_{11} e^{Q_1} + g_{12} e^{Q_2} + \ldots + g_{1n} e^{Q_n},$$
$$y = g_{21} e^{Q_1} + g_{22} e^{Q_2} + \ldots + g_{2n} e^{Q_n},$$
$$z = g_{31} e^{Q_1} + g_{32} e^{Q_2} + \ldots + g_{3n} e^{Q_n},$$

les g_{ik} désignant des fonctions entières de genre fini et les exponentielles des fonctions entières de genre infini, cette surface admet aussi des représentations uniformes de genre fini (c'est-à-dire que les valeurs des x, y, z sont des fonctions entières de genre fini par rapport à u et v).

Pour l'intelligence de cet énoncé, il est nécessaire de donner les explications suivantes. Nous disons qu'une fonction entière $g(u, v)$ est de genre *fini* lorsqu'il en est ainsi par rapport à u pour toute valeur de v et par rapport à v pour toute valeur de u; dans le cas contraire, elle est de genre infini.

6. Nous terminerons ce travail par une remarque concernant l'extension du théorème de M. Borel aux fonctions de deux variables indépendantes. Ce théorème suppose que dans l'identité $(2)_1$ aucune différence $H_i(x, y) - H_k(x, y)$ n'est une constante (pour fixer les idées, nous nous bornons au cas où les coefficients c_i sont des polynomes); d'autre part, pour faire la démonstration, il faut passer au cas d'une variable indépendante en donnant à y, par exemple, une certaine valeur $y = y_0$; il faut donc montrer que cette valeur peut être choisie de façon que les différences ci-dessus mentionnées ne deviennent pas des constantes pour $y = y_0$ et qu'il en soit ainsi des exposants eux-mêmes $H_i(x, y)$. La démonstration est facile, parce que l'ensemble (E) des valeurs de y, telles que l'un des exposants H_i ou l'une des différences $H_i - H_j$ soit une constante par rapport à x, est évidemment dénombrable; en effet, cet ensemble n'est autre chose que l'ensemble des zéros d'un ensemble dénombrable de fonctions entières en y. Nous n'avons donc qu'à choisir une valeur de y n'appartenant pas à l'ensemble (E) pour ramener le cas des fonctions de deux variables au cas des fonctions d'une variable.

7. En corrigeant les épreuves, j'ajoute enfin que nos théorèmes des n^{os} 4 et 5 sont encore vrais quand la représentation uniforme donnée est fournie par des fonctions *méromorphes* par rapport à deux paramètres u et v, telles que

$$x = \frac{N_1}{D_1}, \qquad y = \frac{N_2}{D_2}, \qquad z = \frac{N_3}{D_3},$$

les N_1, N_2, N_3, D_1, D_2, D_3 étant des expressions exponentielles de la forme

$$p_1(u, v)\, e^{Q_1(u,v)} + p_2(u, v)\, e^{Q_2(u,v)} + \ldots + p_n(u, v)\, e^{Q_n(u,v)} + p_0(u, v)$$

utilisée dans ce travail. La démonstration se fait par les mêmes raisonnements.

FIN DU TOME XXXVII.