BULLETIN DE LA S. M. F.

KOENIGS

Sur l'enseignement de la cinématique

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 180-187
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__180_1>

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA CINÉMATIQUE;

Par M. Koenigs.

1. Depuis une dizaine d'années, j'ai adopté, dans l'enseignement de la Cinématique, une méthode que je puis qualifier de purement cinématique qui diffère, en beaucoup de points, de celle que j'ai suivie dans mes *Leçons de cinématique* publiées en 1897. Comme j'ai l'habitude de rédiger d'avance un résumé de mes leçons et de laisser ensuite ce résumé à la disposition de mes auditeurs dans le local du Laboratoire de Mécanique, il ne m'a pas paru nécessaire jusqu'ici de les publier. Mais M. Delassus ayant donné récemment, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, un article dont les idées se rapprochent des miennes, il me semble

naturel de donner ici les principes de ma méthode. Il me suffit, pour cela, de transcrire mes notes de cours [1].

2. Je pars de ce théorème dont je passe la démonstration, laquelle s'établit au moyen d'une considération élémentaire de Cinématique infinitésimale :

Si M, N *sont deux points mobiles*, O *un point fixe et* $\overline{OS}$ *un vecteur équipollent au vecteur* $\overline{MN}$, *la vitesse de* S *est la différence géométrique de la vitesse de* M *et de celle de* N

$$\overline{V_S} = \overline{V_N} - \overline{V_M}.$$

Si, en particulier, le vecteur $\overline{MN}$ a une longueur constante, auquel cas M et N forment un système invariable, le point S décrit une trajectoire sphérique, en sorte que sa vitesse est normale à $\overline{OS}$. Il en résulte que $\overline{V_M}$, $\overline{V_N}$ ont une différence géométrique rectangulaire avec $\overline{MN}$, en sorte que $\overline{V_M}$, $\overline{V_N}$ se projettent sur la droite MN suivant deux vecteurs égaux.

Si en particulier $\overline{V_M}$ est perpendiculaire à MN, sa projection y est nulle. Il doit dès lors en être de même de $\overline{V_N}$ qui est nulle ou bien perpendiculaire à MN, ce qui donne ce théorème, base des recherches de Mannheim : *Si une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, tout autre point de cette droite, invariablement lié au premier, a lui aussi, une trajectoire normale à la droite.*

Il en résulte aussitôt que si trois points A, B, C formant triangle dans un solide en mouvement ont une vitesse nulle, il en est de même de tout autre point M du solide.

Si, en effet, M est hors du plan ABC, les droites MA, MB, MC forment un trièdre et les projections sur ces droites de $\overline{V_M}$ sont toutes nulles, car elles sont respectivement égales aux projections sur ces mêmes droites des vitesses $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$, $\overline{V_C}$, lesquelles sont nulles. Il en résulte que V_M elle-même est nulle.

---

(1) Il va de soi que, dans des questions si classiques, il ne saurait s'agir que de la forme pédagogique. Au point de vue de la nouveauté scientifique, il n'y a rien qui ne soit foncièrement connu. Voilà longtemps, par exemple que Möbius a développé le rôle des système des vecteurs dans la composition des rotations.

Le raisonnement tombe en défaut si M est dans le plan ABC ; mais on peut alors établir le théorème pour deux autres points D, E du corps solide non situés dans le plan ABC et formant avec A, par exemple, un triangle dont le plan ne contient pas M ; à ce triangle ADE et au point M est alors applicable le raisonnement précédent.

3. Considérons deux mouvements différents $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$, $\boxed{\Sigma, \Sigma''}$ d'un même corps Σ par rapport à deux autres Σ', Σ''. Il se peut que dans ces deux mouvements, à un instant donné, tout point de Σ ait la même vitesse. Nous dirons alors que ces deux mouvements sont *tangents*.

4. Nous supposons démontré le principe général de la composition des vitesses. Si Σ est un corps mobile par rapport à un un autre Σ_1, Σ_1 mobile par rapport à un autre Σ_2, Σ_2 mobile par rapport à un autre Σ_3, et ainsi de suite jusqu'à un corps Σ_{n-1} mobile par rapport à un dernier corps Σ_n, P étant un point de Σ et $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ les points de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n-1}$ avec lesquels il coïncide à l'instant t considéré, nous appellerons $\overline{V_P^1}$ la vitesse de P dans le mouvement $\boxed{\Sigma, \Sigma_1}$, $\overline{V_{P_1}^2}$ la vitesse de P_1 dans le mouvement $\boxed{\Sigma_1, \Sigma_2}$, ..., $\overline{V_{P_{n-1}}^n}$ la vitesse de P_{n-1} dans le mouvement $\boxed{\Sigma_{n-1}, \Sigma_n}$ et enfin $\overline{V_P^n}$ la vitesse de P dans le dernier corps Σ_n. On a, en vertu de la composition des vitesses, l'égalité géométrique

$$\overline{V_P^n} = \overline{V_P^1} + \overline{V_{P_1}^2} + \overline{V_{P_2}^3} + \ldots + \overline{V_{P_{n-1}}^n}.$$

5. Appliquons ceci à l'hypothèse où les mouvements $\boxed{\Sigma, \Sigma_1}$, $\boxed{\Sigma_1, \Sigma_2}$, $\boxed{\Sigma_2, \Sigma_3}$, ..., $\boxed{\Sigma_{n-1}, \Sigma_n}$ consistent en des mouvements de rotation autour d'un axe commun, $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ pour chacun des couples de corps respectivement : de plus, représentons par un vecteur $\overline{\Omega}$ porté par Δ, $\overline{\Omega_1}$ porté par $\Delta_1, \ldots, \overline{\Omega_{n-1}}$ porté par Δ_{n-1}, les vitesses angulaires de ces mouvements de rotations respectifs. Les vitesses $\overline{V_P^1}$, $\overline{V_{P_1}^2}$, $\overline{V_{P_2}^3}$, ..., $\overline{V_{P_{n-1}}^n}$ seront les moments de $\overline{\Omega}$ au point P, de $\overline{\Omega_1}$ au point P_1, de $\overline{\Omega_2}$ au point P_2, ..., de $\overline{\Omega_{n-1}}$ au

point P_{n-1}, en sorte qu'en définitive, $\overline{V_P^{n-1}}$ sera le moment résultant au point P du système des vecteurs $\overline{\Omega}, \overline{\Omega_1}, \overline{\Omega_2}, \ldots, \overline{\Omega_{n-1}}$.

Ainsi : *Si deux corps* Σ, Σ_n *sont les membres extrêmes d'une chaîne de corps articulés et* $\overline{\Omega}, \overline{\Omega_1}, \ldots, \overline{\Omega_{n-1}}$, *les vecteurs représentatifs des vitesses angulaires avec lesquelles jouent les diverses articulations, la vitesse de tout point de* Σ *dans* Σ_n *sera le moment résultant en ce point du système des vecteurs* $\overline{\Omega}, \overline{\Omega_1}, \overline{\Omega_2}, \ldots, \overline{\Omega_{n-1}}$.

Ce qui donne quelque valeur théorique à la considération de ce mouvement spécial, c'est que *tout mouvement admet un mouvement à articulations* (c'est-à-dire du genre précédent) *tangent.*

6. Pour le voir, démontrons d'abord ce théorème.

Si deux mouvements différents $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$, $\boxed{\Sigma, \Sigma''}$ *d'un même corps* Σ *sont tels que trois points* A, B, C *formant triangle aient même vitesse à un instant donné dans les deux mouvements, ces deux mouvements sont tangents.*

En effet, si P est un point de Σ, P' le point de Σ' avec lequel il coïncide, comme $\boxed{\Sigma, \Sigma''}$ peut être regardé comme résultant des deux mouvements $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$ et $\boxed{\Sigma', \Sigma''}$ en appelant $\overline{V'_P}$ la vitesse de P dans Σ', $\overline{V''_P}$ sa vitesse dans Σ'' et $\overline{V''_{P'}}$ la vitesse de P' dans Σ'', on a, par la composition des vitesses

$$\overline{V''_P} = \overline{V''_{P'}} + \overline{V'_P}.$$

Si l'on prend pour P le point A, en appelant A' le point de Σ' avec lequel P coïncide actuellement, on aura, par application de cette formule,

$$\overline{V''_A} = \overline{V''_{A'}} + \overline{V'_A}.$$

Or, par hypothèse, $\overline{V''_A} = \overline{V'_A}$, donc $\overline{V''_{A'}} = 0$.

On verra de même que si B', C' sont les points de Σ' avec lesquels B, C coïncident actuellement, on a aussi

$$\overline{V''_{B'}} = 0 \qquad \overline{V''_{C}} = 0.$$

Il existe donc dans Σ' trois points A', B', C' formant triangle et qui ont une vitesse nulle dans le mouvement $\boxed{\Sigma', \Sigma''}$. Il en résulte que tout point P′ de Σ' a une vitesse nulle dans ce mouvement, et puisque $\overline{V''_{P'}} = 0$, il en résulte

$$\overline{V''_P} = \overline{V'_P},$$

ce qui démontre bien que les mouvements $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$, $\boxed{\Sigma, \Sigma''}$ sont tangents.

7. Ceci étant, passons à la démonstration du théorème général.

Soient A, B deux points quelconques du corps Σ et $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$ leurs vitesses. Excluons d'abord le cas où quels que soient dans Σ les points A, B, ces vitesses seraient parallèles. On peut aussi toujours exclure le cas où AB serait normal à $\overline{V_A}$. Dans ces conditions, les plans Π_A, Π_B normaux en A et B à $\overline{V_A}$ et à $\overline{V_B}$ ne seront pas parallèles et se couperont suivant une droite CD différente de AB. Sur CD, je place un vecteur $\overline{\Omega'}$ tel que son moment en A soit justement $\overline{V_A}$. Cela est possible, car V_A est normal au plan Π_A mené par A et CD.

Je dis que $\overline{V_B}$ sera aussi le moment de $\overline{\Omega'}$ en B. En effet, $\overline{V_B}$ est normale au plan Π_B mené par B et CD, en sorte que $\overline{V_B}$ et le moment $\overline{\mu_B}$ dont il s'agit sont portés par la même droite. Or la projection de $\overline{V_B}$ sur AB est égale à la projection de $\overline{V_A}$, en vertu du théorème du début. D'un autre côté, la projection du moment $\overline{\mu_B}$ est aussi égale à la projection du moment $\overline{\mu_A}$ de $\overline{\Omega'}$ au point A, d'après une propriété élémentaire des moments. Il en résulte que $\overline{\mu_B}$ et $\overline{V_B}$, portés par la même droite, ont même projection sur AB : ils coïncident donc.

Prenons maintenant sur la droite CD un point C. Soit $\overline{V_C}$ sa vitesse. La projection de $\overline{V_C}$ sur CA est égale à la projection de $\overline{V_A}$ sur cette même droite (théorème initial); or cette dernière projection est nulle car CA est dans le plan Π_A auquel V_A est perpendiculaire. En conséquence, $\overline{V_C}$ a une projection nulle sur CA. On prouverait de même que $\overline{V_C}$ a une projection nulle sur CB. Dès lors $\overline{V_C}$ est normale au plans Π_C mené par C et AB. Nous placerons sur AB un vecteur $\overline{\Omega}$ dont $\overline{V_C}$ soit le moment au point C, ce qui sera possible, puisque V_C est normale au plan Π_C, mené par AB et par C.

Considérons alors une chaîne articulée Σ, Σ_1, Σ_2 de trois corps dont le premier est le corps Σ, les axes d'articulations étant AB pour Σ et Σ_1, CD pour Σ_1 et Σ_2 et concevons que les vitesses angulaires de ces articulations soient représentées respectivement par les vecteurs $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega'}$. Dans le mouvement $\boxed{\Sigma, \Sigma_2}$ la vitesse de tout point sera le moment résultant en ce point des vecteurs $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega'}$.

Or il est clair que en A, B, C, ces moments résultants, seront précisément $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$, $\overline{V_C}$ respectivement.

Les mouvements $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$, $\boxed{\Sigma, \Sigma_2}$ donnent ainsi lieu à des vitesses égales pour trois points A, B, C de Σ formant triangle, ces deux mouvements sont en conséquence tangents, ce qui établit le théorème.

Remarque. — On a supposé qu'on peut trouver dans le corps Σ deux points A, B dont les vitesses $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$ ne soient pas parallèles.

Supposons que deux points A, B, quelconques du corps aient leurs vitesses parallèles ; comme $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$ ont sur AB des projections égales, en général non nulles, puisque A, B sont quelconques, $\overline{V_A}$ et $\overline{V_B}$ sont égales. Tous les points du corps ont alors même vitesse. Mais, si l'on imagine un couple de vecteurs $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega'}$ dont le moment en tout point soit précisément la vitesse $\overline{V}$, sans indice, commune à tous les points du corps, on pourra encore imaginer une chaîne articulée de trois corps où $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega'}$ représentent les vitesses angulaires des articulations et l'on retombe sur le théorème général.

8. Maintenant qu'on a introduit dans la distribution des vitesses d'un solide en mouvement, la considération des systèmes de vecteurs et du moment où ceux-ci n'interviennent que par leur moment résultant, il sera permis d'y opérer toutes les transformations qui les laissent équivalents à eux-mêmes. On aura toujours la ressource d'interpréter chaque forme particulière au moyen

d'une chaîne articulée d'un nombre de membres aussi grand qu'on voudra.

En particulier, en envisageant la représentation canonique, on arrivera à la notion du *mouvement hélicoïdal tangent*. Pareillement, par ce moyen, la composition des mouvements en ce qui concerne les vitesses, problème qui porte le nom générique de *composition des rotations*, se ramène immédiatement à la composition des systèmes de vecteurs.

9. Nous ferons remarquer encore que cette méthode n'est pas seulement commode pour parvenir par une voie cinématique aux résultats généraux qu'on vient de rappeler, mais elle s'applique aussi avec la plus grande souplesse à tous les cas particuliers.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du mouvement d'une figure plane dans son plan. En réalité, cette figure est solidaire d'un corps Σ qui glisse par une face plane ε sur une face plane ε' d'un second corps Σ'. Prenons deux points A, B dans le plan ε et un point C hors de ce plan dans le corps Σ, sur une perpendiculaire en A au plan ε.

Excluons encore le cas où tous les points du corps auraient leurs vitesses parallèles, auquel cas elles seront en outre égales (mouvement de translation tangent). Les plans Π_A, Π_B normaux en A, B aux vitesses $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$ des points A, B sont normaux aux plans ε, car $\overline{V_A}, \overline{V_B}$ sont évidemment dans ce plan. Appelons Δ la droite d'intersection de Π_A, Π_B. Plaçons sur Δ un vecteur $\overline{\Omega}$ dont $\overline{V_A}$ soit le moment en A. On verra, comme plus haut, que $\overline{V_B}$ est aussi le moment de $\overline{\Omega}$ en B. Enfin, le point C décrit dans un plan parallèle à ε une trajectoire égale à celle de A et avec la même vitesse, en sorte que $\overline{V_C}$ sera aussi le moment de $\overline{\Omega}$ en C. Dès lors, si l'on imagine un corps Σ_1 par rapport auquel Σ tournerait autour de Δ avec la vitesse angulaire figurée par le vecteur $\overline{\Omega}$, les points A, B, C formant triangle auront mêmes vitesses $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$, $\overline{V_C}$ que dans le mouvement donné $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$; en conséquence, ce dernier mouvement et le mouvement $\boxed{\Sigma, \Sigma_1}$ sont tangents, c'est ce qu'on exprime en disant qu'il existe une *rotation tangente*.

Je ne crois pas devoir insister, car ces exemples de raisonnement donnent une idée suffisante du parti qu'on peut tirer de cette méthode.

10. Un mot en terminant.

Les personnes habituées à raisonner au moyen des déplacements infiniment petits pourront, au premier abord, trouver cette méthode indirecte, peut-être même artificielle. Cependant elle correspond plus que toute autre à la réalité des choses, et la notion des mouvements tangents sur laquelle elle s'appuie met bien en relief ce fait essentiel que ce n'est qu'au point de vue des vitesses que les mouvements qu'on y considère peuvent se substituer les uns aux autres. Elle n'est pas non plus si abstraite, puisque, par la considération de la chaîne articulée tangente, elle fournit une interprétation très claire, susceptible de s'accorder avec la plus scrupuleuse logique.