BULLETIN DE LA S. M. F.

G. BRATU

Sur les équations intégrales non linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 113-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__113_0>

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES;

PAR M. G. BRATU.

1. Le premier type d'équations intégrales d'ordre supérieur, qui apparaît d'une façon naturelle, est de la forme

$$\Phi[x, \varphi(x)] + \int F[x, y, \varphi(y)]\, dy = 0, \tag{1}$$

où $\Phi(x, z)$ et $F(x, y, z)$ sont deux fonctions *données*. Ce sont *les équations intégrales non linéaires ordinaires*.

M. E. Schmidt [1] considère le cas de l'équation

$$\varphi(x) + \int N(x, s)\,\varphi(s)\, ds + \ldots$$
$$+ \int N(x, s_1, \ldots, s_n)\,\varphi(s_1)^{\alpha_1} h(s_1)^{\beta_1} \ldots \varphi(s_m)^{\alpha_m} h(s_m)^{\beta_m}\, ds_1 \ldots ds_m = 0,$$

les α_i et β_i étant des entiers positifs et les N et h des fonctions données. Ce sont les équations non linéaires *à puissances intégrales*.

M. V. Volterra [2] a imaginé des équations intégrales dans lesquelles figurent des *compositions* ou des *puissances itérées* de la fonction inconnue. Par exemple

$$F(x, y) = \Sigma a_{\alpha\beta_1\ldots\beta_n} F^{\alpha} \Phi_1^{\beta_1} \ldots \Phi_n^{\beta_n},$$

les a étant des constantes, les $\Phi_i(x, y)$ des fonctions données et la puissance itérée F^m étant par définition l'intégrale multiple :

$$F^m = \int \cdots \int F(x, s_1) F(s_1, s_2) \ldots F(s_{m-1}, y)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_{m-1}.$$

Ce sont les équations intégrales *d'ordre itératif supérieur*.

Dans tous les cas, les limites des intégrales peuvent être constantes ou variables.

---

(1) *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (*Math. Ann.*, t. LXV, 1908).

(2) *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, 1910.

2. Nous voulons étudier l'équation intégrale non linéaire *ordinaire*

$$\Phi[x, \varphi(x)] + \int_a^b F[x, y, \varphi(y)]\, dy = 0. \tag{1}$$

Si les fonctions données $\Phi(x, z)$ et $F(x, y, z)$ sont des séries *entières* en z, le problème se ramène à celui des équations à puissances intégrales.

En introduisant un paramètre λ et en réduisant l'intervalle (a, b) à l'intervalle $(0, 1)$, nous allons considérer d'abord l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) F[y, \varphi(y)]\, dy, \tag{2}$$

dans laquelle

$$F(y, \varphi) = b_0(y) + b_1(y)\varphi + \ldots + b_n(y)\varphi^n + \ldots, \tag{3}$$

les coefficients b_i étant des fonctions *données*, finies et intégrables, et la série étant *régulière* pour $0 \leqq y \leqq 1$ et $|\varphi| < \rho$.

3. *Existence de la solution autour de* $\lambda = 0$. — Cherchons un développement en série ordonné suivant les puissances entières du paramètre λ et satisfaisant à l'équation (2).

En posant

$$\varphi(x) = \lambda a_1(x) + \lambda^2 a_2(x) + \ldots + \lambda^n a_n(x) + \ldots, \tag{4}$$

en substituant cette expression dans l'équation (2) et en identifiant les deux membres, nous obtenons les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x, y) b_0(y)\, dy, \\ a_2(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x, y) b_1(y) a_1(y)\, dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{5}$$

En général, le coefficient du terme en λ^n dans $\varphi^p(y)\ (p \leqq n)$ est

$$a_{n,p} = \Sigma\, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_p},$$

$i_1, i_2, \ldots, i_p$ étant un arrangement avec répétition des nombres

1, 2, ..., n pris p à p et tel que $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n$. On a, en particulier, $a_{n,1} = a_n(y)$, $a_{n,n} = a_1^n(y)$.

On trouve donc

$$(6) \quad a_{n+1}(x) = \int_0^1 K(x,y)\,[b_1 a_n + b_2 a_{n,2} + \ldots + b_p a_{n,p} + \ldots + b_n a_1^n]\,dy.$$

Démontrons que la série ainsi obtenue, et qui satisfait *formellement* à l'équation (2), est convergente au voisinage de $\lambda = 0$.

Nous remplaçons la série (3) par une série majorante

$$B_0 + B_1\varphi + \ldots + B_n\varphi^n + \ldots,$$
$$B_n \geqq |b_n(y)| \quad \text{pour} \quad 0 \leqq y \leqq 1,$$

et le noyau par une fonction $K_1(x,y)$ *positive* pour x et y compris entre 0 et 1 et telle qu'on ait dans ce domaine

$$|K(x,y)| \leqq K_1(x,y).$$

En cherchant à satisfaire la nouvelle équation

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^1 K_1(x,y)\,[B_0 + B_1\Phi(y) + \ldots]\,dy$$

par une série de la forme

$$(7) \qquad \Phi(x) = \lambda A_1(x) + \lambda^2 A_2(x) + \ldots + \lambda^n A_n(x) + \ldots,$$

nous trouvons, comme plus haut, les équations

$$A_1(x) = \int_0^1 K_1(x,y) B_0\,dy,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{n+1}(x) = \int_0^1 K_1(x,y)\,[B_1 A_n + \ldots + B_p A_{n,p} + \ldots + B_n A_1^n]\,dy, \qquad \ldots,$$

d'où l'on conclut, de proche en proche,

$$A_1(x) \geqq |a_1(x)|, \qquad \ldots, \qquad A_n(x) \geqq |a_n(x)|, \qquad \ldots.$$

La série (7) *est donc majorante pour la série* (4).

Si $F(y, \varphi)$ est holomorphe pour $|\varphi| < \rho$, $0 \leqq y \leqq 1$ et si N est le maximum de son module dans ce domaine, on peut prendre comme majorante de F la fonction

$$\frac{N\rho}{\rho - \varphi}.$$

Supposons en outre $|K(x, y)| \leqq M$ pour $0 \leqq x, y \leqq 1$.

Tout revient à démontrer que l'équation intégrale

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^1 \frac{MN\rho}{\rho - \Phi(y)} dy \tag{8}$$

admet une solution holomorphe en λ autour de $\lambda = 0$.

Or l'équation (8) montre que Φ ne dépend pas de x. On peut donc poser $\Phi = C(\lambda)$ et l'on a l'équation

$$C = \frac{\lambda MN\rho}{\rho - C},$$

d'où la solution *nulle pour* $\lambda = 0$

$$C = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\lambda MN\rho}}{2}.$$

Cette solution étant holomorphe pour $4MN|\lambda| < \rho$, *la série* (4) *est absolument et uniformément convergente pour*

$$|\lambda| < \frac{\rho}{4MN} \quad \text{et} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{9}$$

et le module de $\varphi(x)$ reste inférieur à ρ. Le développement (3) est donc valable et *la somme de cette série représente dans tout le domaine* (9) *une solution de l'équation* (2) ([1]).

4. Pour $F(\varphi) = e^\varphi$ on a *l'équation intégrale exponentielle* ([2]).

L'inégalité (9) devient

$$|\lambda| < \frac{\rho}{4Me^\rho} = \rho'.$$

Comme e^φ est une fonction entière en φ, ρ peut être pris aussi grand qu'on veut. Le rayon de convergence ρ' est maximum pour $\rho = 1$.

Remarquons aussi que l'équation intégrale (2) admet *une seule solution holomorphe autour de* $\lambda = 0$,

---

([1]) G. Bratu, *Sur certaines équations intégrales non linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CL, 11 avril 1910, p. 896).

([2]) G. Bratu, *Sur l'équation intégrale exponentielle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CLII, 18 avril 1911, p. 1048).

5. Si l'on considère l'équation

$$(10)\qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) F[\varphi(y)]\, dy + f(x),$$

f étant une fonction donnée, finie et intégrable pour $0 \leqq x \leqq 1$, et $F(\varphi)$ une fonction entière en φ, en posant $\varphi(x) = \psi(x) + f(x)$, cette équation prend la forme

$$(11)\quad \psi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\,[(f) + \psi F'(f) + \ldots + \frac{1}{n!}\psi^n F^{(n)}(f) + \ldots]\, dy$$

et l'on est ramené au cas de l'équation (2).

L'équation intégrale (10) *admet donc autour de* $\lambda = 0$ *une solution holomorphe et une seule se réduisant à* $f(x)$ *pour* $\lambda = 0$.

Pour $F(\varphi) = \varphi$ on a *l'équation de Fredholm.*

6. *Étude de la solution autour d'une valeur quelconque de* λ. — Pour l'équation intégrale non linéaire de la forme

$$(12)\qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, F[y, \varphi(y)]\, dy + f(x),$$

où $F(x, z)$ est une fonction *entière* en z, on peut énoncer le *théorème fondamental* suivant : Soit $\varphi_0(x)$ une fonction réelle ou complexe, dont le module reste *fini* pour x réel et compris entre 0 et 1.

Si l'équation (12) *admet pour* $\lambda = \lambda_0$ *la solution* $\varphi = \varphi_0(x)$ *et si le déterminant de Fredholm* $D(\lambda)$ *formé avec le noyau* $K(x, y)\, F'_\varphi[y, \varphi(y)]$ *est différent de zéro pour* $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$, *l'équation* (12) *admet une solution et une seule* $\varphi(x, \lambda)$ *holomorphe en* λ *autour de* λ_0 *et se réduisant à* $\varphi_0(x)$ *pour* $\lambda = \lambda_0$.

En effet, en posant $\varphi = \varphi_0 + \psi$, $\lambda = \lambda_0 + \mu$, l'équation (12) devient

$$(13)\quad \psi(x) = \mu \int_0^1 K(x, y)\,[F(\varphi_0) + \psi F'(\varphi_0) + \ldots]\, dy$$
$$+ \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) \left[\psi F'(\varphi_0) + \ldots + \frac{\psi^n}{n!} F^{(n)}(\varphi_0) + \ldots\right] dy,$$

car, par hypothèse, on a

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int_0^1 K(x, y)\, F(\varphi_0)\, dy + f(x) \quad (^1).$$

L'équation (13) admet pour $\mu = 0$ la solution $\psi(x) = 0$. Cherchons si l'on peut satisfaire à cette équation par une série de la forme

$$(14) \qquad \psi(x) = \mu a_1(x) + \mu^2 a_2(x) + \ldots + \mu^n a_n(x) + \ldots.$$

En remplaçant ψ par cette série dans l'équation (13) et en identifiant les deux membres, on trouve

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1(x) = \lambda_0 \displaystyle\int_0^1 K(x, y)\, F'(\varphi_0) a_1(y)\, dy + \int_0^1 K(x, y)\, F(\varphi_0)\, dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_n(x) = \lambda_0 \displaystyle\int_0^1 K(x, y)\, F'(\varphi_0) a_n(y)\, dy + u_n(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

$u_n(x)$ étant une fonction connue si $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont connus, car on a, avec les notations du paragraphe 3,

$$(16) \quad u_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) \left[\frac{F''}{2!} a_{n,2} + \frac{F'''}{3!} a_{n,3} + \ldots + \frac{F^{(n)}}{n!} a_1^n \right] dy$$
$$+ \int_0^1 K(x, y) \left[F' a_{n-1} + \frac{F''}{2!} a_{n-1,2} + \ldots + \frac{F^{(n-1)}}{(n+1)!} a_1^{n-1} \right] dy.$$

Si λ_0 n'est pas racine du déterminant de Fredholm formé avec le noyau $K(x, y)\, F'_\varphi(y, \varphi_0)$ et si $\Gamma(x, y, \lambda)$ est le *noyau résolvant* correspondant, les équations (15) donnent

$$(17) \qquad a_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 \Gamma(x, y, \lambda_0) u_n(y)\, dy + u_n(x).$$

On obtient ainsi, de proche en proche, tous les coefficients du développement (14) déterminés d'une manière *unique*. Il reste à

---

(1) Nous écrivons, pour abréger, $F(\varphi)$, F', ... au lieu de $F[y, \varphi(y)]$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$, ...

démontrer que cette série est convergente pour μ suffisamment petit. Nous allons employer la méthode de M. Schmidt.

Avec les hypothèses faites sur $F(x, \varphi)$, $K(x, y)$ et λ_0, toutes les expressions

$$\int_0^1 K(x, y) F^{(i)}(\varphi_0)\, dy \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

qui interviennent dans le développement (16), ainsi que la fonction $\Gamma(x, y, \lambda)$, *restent finies* pour λ voisin de λ_0 et $0 \leqq x, y \leqq 1$. On peut donc écrire pour ce domaine

$$(18) \qquad \left| \int_0^1 K(x, y) F^{(i)}(\varphi_0)\, dy \right| < P \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \quad |\Gamma(x, y, \lambda)| < M,$$

P et M étant deux nombres positifs déterminés. Posons pour abréger

$$(19) \qquad \begin{cases} \sum_n (a) = \dfrac{a_{n,2}}{2!} + \dfrac{a_{n,3}}{3!} + \ldots + \dfrac{a_1^n}{n!}, \\ \sum'_n (a) = a_{n-1} + \dfrac{a_{n-1,2}}{2!} + \ldots + \dfrac{a_1^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}$$

et désignons par $\tilde{a}_i$ le maximum du module de $a_i(y)$ pour $0 \leqq y \leqq 1$. La formule (16) donne

$$(20) \qquad |u_n(x)| < P[|\lambda_0| \Sigma_n(\tilde{a}) + \Sigma'_n(\tilde{a})]$$

et, d'après (17), (18) et (20),

$$(21) \qquad |a_n(x)| < P(1 + |\lambda_0| M)[|\lambda_0| \Sigma_n(\tilde{a}) + \Sigma'_n(\tilde{a})].$$

Ces remarques étant faites, la convergence de la série (14) se démontre facilement. Comme l'équation

$$(22) \qquad \Psi = P(1 + |\lambda_0| M) \left\{ \mu + \mu\Psi + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\lambda_0| + \mu}{m!} \Psi^m \right\}$$

admet une solution holomorphe autour de $\mu = 0$ et nulle avec μ,

$$(23) \qquad \Psi = A_1 \mu + A_2 \mu^2 + \ldots + A_n \mu^n + \ldots,$$

en substituant ce développement dans l'équation (22) et identifiant les deux membres, on trouve

$$(24)\qquad \begin{cases} A_1 = P(1+|\lambda_0|M), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_n = P(1+|\lambda_0|M)[|\lambda_0|\Sigma_n(A)+\Sigma'_n(A)]. \end{cases}$$

Les coefficients A_i sont des constantes positives, et comme

$$|a_i(x)| \leqq A_i, \qquad \Sigma_n(\bar{a}) \leqq \Sigma_n(A), \qquad \Sigma'_n(\bar{a}) \leqq \Sigma'_n(A),$$

il résulte, d'après (21) et (24), que l'on a en général

$$(25)\qquad |a_n(x)| \leqq A_n.$$

La série (14) est donc *régulière* pour les valeurs de μ intérieures au cercle de convergence de la série (23) et le théorème énoncé est démontré.

Si le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ formé avec le noyau $K(x, y) F'_\varphi(y, \varphi)$ est *nul* pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$, l'équation (12) admet, en général, au voisinage de λ_0, *deux branches solutions* au moins, *qui se croisent pour* $\lambda = \lambda_0$ *et* $0 \leqq x \leqq 1$. On dit, dans ce cas, qu'il y a *ramification* autour de φ_0.

7. *Cas général.* — Prenons plus généralement l'équation intégrale non linéaire du premier ordre

$$(26)\qquad \Phi[x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 K(x, y) F[y, \varphi(y)]\, dy,$$

où, pour simplifier, nous supposons le noyau $K(x, y)$ une fonction continue et $\Phi(x, z)$, $F(x, z)$ des séries *entières* en z pour $0 \leqq x, y \leqq 1$.

Soit, pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0(x)$ une solution de cette équation *finie* et *continue* pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

En posant $\lambda = \lambda_0 + u$, $\varphi = \varphi_0 + \psi$, on a

$$\Phi(x, \varphi) = \Phi(x, \varphi_0) + \psi\, \Phi'(x, \varphi_0) + \dots,$$
$$F(x, \varphi) = F(x, \varphi_0) + \psi\, F'(x, \varphi_0) + \dots,$$

les dérivées étant prises par rapport à φ. En introduisant ces développements dans l'équation (26), on voit que la *forme intégrale* *linéaire* en ψ, indépendante de μ, est

$$(27) \qquad \Phi'(x, \varphi_0)\psi(x) - \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) F'(y, \varphi_0)\psi(y)\,dy.$$

Nous allons distinguer *trois cas :*

1° Si l'expression $\Phi'_\varphi[x, \varphi_0(x)]$ est *différente de zéro* pour $0 \leqq x \leqq 1$, nous dirons que la solution $\varphi_0(x)$ est de *seconde espèce.*

2° Si $\Phi'_\varphi[x, \varphi_0(x)]$ s'annule pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1, *sans être identiquement nulle* dans tout cet intervalle, la solution sera dite de *troisième espèce.*

3° Si $\Phi'_\varphi[x, \varphi_0(x)] \equiv 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, nous dirons que $\varphi_0(x)$ est une solution de *première espèce.*

Dans le premier cas le noyau de la forme intégrale linéaire peut s'écrire

$$(28) \qquad K_{\varphi_0}(x, y) = K(x, y)\, F'[y, \varphi_0(y)] \frac{1}{\Phi'[x, \varphi_0(x)]}.$$

8. Supposons d'abord $\Phi(x, \varphi_0) \equiv 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$.

L'équation (26) est satisfaite pour $\lambda = 0$ et $\varphi = \varphi_0$; comme la fonction *déterminante* de Fredholm $D(\lambda)$ est égale à 1 pour $\lambda = 0$, il résulte, d'après le *théorème de Schmidt*, que l'équation (26) admet une solution holomorphe et une seule $\varphi(x, \lambda)$ se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = 0$.

Il s'ensuit que, pour $\lambda = 0$, l'équation intégrale (26) admet un nombre de solutions au moins égal à celui des racines de l'équation $\Phi(x, z) = 0$, finies et continues pour $0 \leqq x \leqq 1$.

9. Dans le plan de la variable complexe λ, en dehors de l'origine, on peut, après M. Schmidt, énoncer le *théorème général* suivant :

Si les fonctions $\Phi(x, z)$ et $F(x, z)$ sont entières en z pour $0 \leqq x \leqq 1$; si l'équation (26) admet pour $\lambda = \lambda_0$ la solution finie et de deuxième espèce $\varphi = \varphi_0(x)$; si le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ formé avec le noyau $K_{\varphi_0}(x, y)$ est différent de zéro pour $\lambda = \lambda_0$, l'équation (26) admet une solution et une seule $\varphi(x, \lambda)$ holomorphe en λ autour de λ_0 et se réduisant identiquement à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = \lambda_0$.

Les deux premières conditions étant remplies, si le déterminant $D(\lambda)$ est *nul* pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$, le théorème de Schmidt nous apprend qu'il y a *ramification* autour de λ_0, et $\varphi_0(x)$ est *une solution limite* ou *de croisement*. Pour λ voisin de λ_0, l'équation intégrale (26) admet au moins deux solutions finies et de deuxième espèce $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, qui tendent vers $\varphi_0(x)$ lorsque λ tend vers λ_0.

10. La forme particulière $K(x,y)\,A(x)\,B(y)$, sous laquelle se présente le noyau (28), nous permet de faire une remarque pour le cas où le noyau donné $K(x,y)$ serait *symétrique* et *défini*. Le noyau (28) est alors symétrisable et toutes ses constantes caractéristiques sont *réelles*. Donc si l'équation (26) admet une solution *finie* $\varphi_0(x)$ pour une valeur λ_0 en dehors de l'axe réel, *cette solution est régulière autour de* λ_0.

Le théorème de M. Schmidt ne nous apprend rien sur les solutions de première ou de troisième espèce. Remarquons que si $\Phi(x, \varphi)$ est de premier degré en φ, toutes les solutions de l'équation (26) sont de *même espèce*.

11. Si $K(x,y) = 0$ pour $y > x$, on a l'équation du type de Volterra ([1]). Comme dans ce cas le noyau (28) n'admet aucune constante caractéristique, l'équation intégrale ne peut pas admettre des solutions limites ou de croisement.

ÉQUATIONS INTÉGRALES ALGÉBRIQUES.

12. Nous appelons *équation intégrale algébrique* une équation de la forme

$$(29) \qquad P_m[x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 K(x,y)\,P_n[y, \varphi(y)]\,dy,$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} P_m &= A_m(x)\,\varphi^m + A_{m-1}(x)\,\varphi^{m-1} + \ldots + A_0(x), \\ P_n &= B_n(y)\,\varphi^n + B_{n-1}(y)\,\varphi^{n-1} + \ldots + B_0(y). \end{aligned}$$

Si ces polynomes admettent une *solution commune* $\varphi(x)$,

---

([1]) Tr. Lalesco, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1908.

celle-ci est solution de l'équation intégrale (29) quel que soit λ.

De même, si pour une racine $\varphi_0(x)$ de $P_m = 0$, on a identiquement

$$\int_0^1 K(x, y) P_n[y, \varphi_0(y)]\, dy = 0, \tag{30}$$

$\varphi_0(x)$ est solution de l'équation (29) *quel que soit* λ. En particulier pour l'équation *linéaire* de Fredholm, on a

$$P_m = \varphi(x) - f(x), \qquad P_n = \varphi(y)$$

et si les données $K(x, y)$ et $f(x)$ sont liées par la relation

$$\int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy = 0,$$

$f(x)$ est une solution de l'équation intégrale *quel que soit* λ; c'est d'ailleurs la *seule*, dans le cas où λ n'est pas une constante caractéristique du noyau $K(x, y)$.

Si pour $0 \leqq x \leqq 1$ on a $A_i(x) = 0$ $(i > 1)$ et $A_1(x) \neq 0$, l'équation (29) est dite de *seconde espèce*.

13. Supposons $A_m(x) \neq 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$ et considérons le solutions $\varphi_i(x)$ de *deuxième espèce*, c'est-à-dire telles que la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} P_m[x, \varphi_i(x)]$$

ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre 0 et 1.

Si la fonction $P_m(x, \varphi)$ est un polynome en x et φ, comme $A_m(x) \neq 0$, toutes les solutions $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_m^0$ de l'équation

$$P_m(x, \varphi) = 0 \tag{31}$$

restent *finies*. Pour avoir des solutions de deuxième espèce de l'équation (29), correspondant à $\lambda = 0$, il suffit de prendre les fonctions $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_\nu^0$ $(\nu \leqq m)$, qui n'ont aucun point critique le long du segment $(0, 1)$ de l'axe réel.

En général, si n est le nombre des solutions $\varphi_i^0(x)$ de l'équation (29), finies et de deuxième espèce, le théorème de Schmidt nous apprend que *cette équation intégrale admet n solutions* $\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda), \ldots, \varphi_n(x, \lambda)$ *holomorphes en λ autour de* *l'origine et qui tendent respectivement vers* $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ *lorsque* λ *tend vers zéro.*

14. *Étude des cas simples.* — Considérons l'équation intégrale élémentaire

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)\,B(y)\,\varphi^2(y)\,dy + f(x). \tag{32}$$

En posant

$$t = \lambda \int_0^1 B(y)\,\varphi^2(y)\,dy, \tag{33}$$

l'équation (32) donne

$$\varphi(x) = t A(x) + f(x) \tag{34}$$

et l'équation (33) devient

$$t = \lambda(at^2 + bt + c), \tag{35}$$

a, b, c étant des constantes déterminées. Soient $t_1(\lambda)$ et $t_2(\lambda)$ les solutions de cette dernière équation; l'une d'elles est *holomorphe* autour de $\lambda = 0$ et s'annule avec λ; l'autre, *uniforme* autour de $\lambda = 0$, admet ce point comme *pôle* simple. En dehors de l'origine les deux branches restent *finies* et admettent dans tout le plan *deux points critiques* algébriques simples

$$\lambda = \frac{1}{b \pm 2\sqrt{ac}}. \tag{36}$$

Comme on a

$$a = \int_0^1 B(y)\,A^2(y)\,dy, \qquad c = \int_0^1 B(y)\,f^2(y)\,dy,$$

et d'après l'inégalité de Schwartz

$$\left[\int_0^1 AB\,f\,dy\right]^2 < \int_0^1 BA^2\,dy \int_0^1 B\,f^2\,dy,$$

il résulte que les deux points critiques (36) sont *réels*. Remarquons que le noyau de l'équation (32) est *symétrisable*.

Pour $c = 0$, les deux solutions sont *holomorphes* en dehors de $\lambda = 0$; on est dans le cas (30) du paragraphe **12**.

15. Considérons pour le même noyau l'équation intégrale de seconde espèce et *de degré* $n > 1$

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)\, B(y)\, P_n[y, \varphi(y)]\, dy, \tag{37}$$

dans laquelle

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \ldots + A_n(y)\varphi^n.$$

En posant $\varphi(x) = tA(x)$, la fonction t doit satisfaire à l'équation algébrique *adjointe*

$$t = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n), \tag{38}$$

dans laquelle

$$\alpha_i = \int_0^1 A_i(y)\, B(y)\, A^i(y)\, dy \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{39}$$

La résolution de l'équation intégrale (37) se ramène ainsi à celle de l'équation algébrique (38).

Si $\alpha_n \neq 0$, pour chaque valeur $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ l'équation (39) détermine n valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pour t, en général distinctes. *L'équation (37) admet donc en général et au plus n solutions distinctes de la forme*

$$\varphi_i(x, \lambda) = t_i(\lambda)\, A(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

holomorphes en λ autour de λ_0.

Si l'on a

$$\alpha_0 = \int_0^1 A_0(y)\, B(y)\, dy \neq 0,$$

la théorie des fonctions algébriques nous apprend que les différentes branches $t_i(\lambda)$ ne peuvent admettre comme pôle que l'unique point $\lambda = 0$. En ce point *une seule solution de l'équation (38) s'annule; toutes les autres sont infinies.*

En posant $t = \frac{1}{\tau}$, cette équation devient

$$\lambda\alpha_0\tau^n + (\lambda\alpha_1 - 1)\tau^{n-1} + \ldots + \lambda\alpha_n = 0. \tag{41}$$

Pour $\lambda = 0$, on a donc $n - 1$ racines τ nulles. On peut voir facilement par la méthode de Puiseux la distribution de ces racines en cycles. Comme dans l'équation (41), les coefficients du terme en λ et du terme en τ^{n-1} sont *différents de zéro*, les $n-1$ racines, nulles pour $\lambda = 0$, forment *un seul système circulaire* autour de l'origine.

On en déduit pour les solutions (40), de l'équation intégrale (37), les résultats suivants :

Autour de $\lambda = 0$ *une seule* des branches $\varphi_i(x, \lambda)$ est *holomorphe* et *s'annule avec* λ; *toutes les* $n-1$ *autres sont infinies à l'origine, admettent* $\lambda = 0$ *comme point de ramification et forment autour de lui un seul système circulaire.*

Pour $\lambda \neq 0$, les fonctions algébriques t_i, définies par l'équation (38), ne peuvent admettre comme points singuliers que des *points critiques algébriques*. Pour les obtenir, on élimine t entre les deux équations

$$t = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n), \tag{38}$$

$$1 = \lambda(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + \ldots + n\alpha_n t^{n-1}). \tag{42}$$

Soit Δ le résultant ainsi obtenu; il est un déterminant d'ordre $2n-1$ et se réduit à

$$\Delta = \lambda^{n-1} D_n(\lambda), \tag{43}$$

D_n étant un polynome de degré n. Si $\alpha_n \neq 0$ et $n > 1$, on trouve

$$D_n(0) = (-1)^n[(n-1)\alpha_n]^{n-1} \neq 0.$$

Il existe donc n *valeurs singulières* $\lambda_s (s = 1, 2, \ldots, n)$ *différentes de zéro*, distinctes ou confondues.

Pour chaque valeur λ_s, l'équation (38) admet au moins une racine multiple. Ces valeurs particulières de t sont les racines de l'équation

$$(n-1)\alpha_n t^n + \ldots + \alpha_2 t^2 - \alpha_0 = 0, \tag{44}$$

qu'on obtient en éliminant λ entre les équations (38) et (42).

Comme, d'après la théorie de l'élimination, pour toute racine multiple de (44) les équations (38) et (42) devraient avoir plusieurs racines communes en λ, ce qui est évidemment absurde, il résulte que *l'équation* (44) *a toutes ses racines simples.*

D'autre part, les dérivées par rapport à t des équations (42) et (44) s'annulent pour les mêmes valeurs de $t \neq 0$ et *différentes des racines de l'équation* (44). Par suite, si pour une valeur de λ, l'équation (38) a une racine multiple en t, cette racine est certainement *double*.

On a le même résultat, si l'on suppose $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = 0$ et $\alpha_i \neq 0$. D'où la conclusion :

Toutes les branches $\varphi_i(x, \lambda)$, *solutions de l'équation intégrale* (37), *ont comme points singuliers,* en dehors de $\lambda = 0$, *des points critiques de biramification dans tout le plan de la variable complexe* λ.

16. *Noyau de M. Goursat.* — Supposons maintenant le noyau $K(x, y)$, de l'équation intégrale, de la forme

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{p} X_i(x) Y_i(y). \tag{45}$$

Ils ont été considérés pour la première fois par M. Goursat [1]. Le nombre de leurs *constantes caractéristiques* est *fini* et M. Schmidt a démontré que tout noyau à un nombre n de constantes caractéristiques peut être mis sous la forme (45), p étant *fini* et *au moins égal à* n.

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) P_n[y, \varphi(y)]\, dy + f(x), \tag{46}$$

dans laquelle $K(x, y)$ a la forme (45) et

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \ldots + A_n(y)\varphi^n, \tag{47}$$

avec $A_n(y) \neq 0$ pour $0 \leqq y \leqq 1$.

En posant

$$t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y) P_n[y, \varphi(y)]\, dy, \tag{48}$$

la solution de l'équation (46) prend la forme

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{p} X_i(x)\, t_i(\lambda) + f(x), \tag{49}$$

---

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. X; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXV.

les fonctions t_i étant solutions du *système adjoint d'équations algébriques à coefficients constants*

$$(50) \qquad t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y)\, P_n\left[y, \sum_{j=0}^{p} X_j(y) t_j + f(y)\right] dy.$$

Par suite, *toute solution de l'équation intégrale* (46) *est fonction algébrique de* λ. Elle a un nombre *fini* de points singuliers dans tout le plan et ces points sont *des pôles* ou *des points critiques algébriques*.

Comme pour $\lambda = 0$, on a $t_1 = t_2 = \ldots = t_p = 0$, les équations (50) admettent un système et un seul de solutions $t_i(\lambda)$, *holomorphes autour de l'origine* et s'annulant avec λ. Toutes les autres solutions, infinies à l'origine, ont $\lambda = 0$ comme *pôle* ou *point critique d'ordre négatif*.

Pour $\lambda \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Bezout, que les équations (50) admettent n^p systèmes de solutions *finies* au plus. En considérant encore les équations homogènes formées à l'aide des groupes de degré n de chacune des équations (50), on voit que toute solution finie pour une valeur $\lambda_0 \neq 0$ *reste finie dans tout le plan en dehors de l'origine*. Les points singuliers sont donc *des points critiques algébriques d'ordre positif*.

Pour les obtenir, il suffit de former le déterminant fonctionnel Δ des équations (50) et de résoudre l'équation

$$S(\lambda) = 0,$$

obtenue en éliminant $t_1, t_2, \ldots, t_p$ entre les équations (50) et l'équation algébrique de degré p en λ et $p(n-1)$ en t

$$\Delta(\lambda, t_1, t_2, \ldots, t_p) = 0.$$

La règle de Fouret [1] donne une limite supérieure du nombre des valeurs singulières.

Remarquons encore que pour $n > 1$, les solutions holomorphes autour de $\lambda = 0$ *ne sont pas des fonctions entières de* λ, les ordres de grandeur des deux membres de l'équation (46) n'étant pas, en général, égaux pour φ infiniment grand.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. II, p. 127.

On peut donc énoncer les conclusions suivantes :

1° *Toute solution de l'équation intégrale algébrique* (46), *dans laquelle le noyau a la forme* (45), *est une fonction algébrique de* λ.

2° Autour de $\lambda = 0$, *une solution et une seule est holomorphe; elle s'annule pour* $\lambda = 0$. *Toutes les autres branches ont* $\lambda = 0$ *comme pôle ou point de ramification d'ordre négatif.*

3° Pour $\lambda \neq 0$, *l'équation* (46) *admet en général et au plus* n^p *solutions de la forme*

$$\varphi(x) = X_1(x)\, t_1(\lambda) + \ldots + X_p(x)\, t_p(\lambda) + f(x).$$

4° Toutes ces solutions n'admettent comme points singuliers $\lambda \neq 0$ que *des points critiques de deuxième ordre*, c'est-à-dire qu'*autour de toute solution limite ou de croisement* $\varphi_0(x, \lambda)$ *il y a biramification.*

5° Si $n > 1$, *toute solution, holomorphe autour de l'origine, admet au moins un point de ramification dans le plan de la variable complexe* λ.

17. *Cas de* $p = \infty$. — Si le noyau de l'équation intégrale (46) a la forme

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)\, Y_i(y), \tag{51}$$

en employant le même procédé ([1]), nous ramenons la résolution de cette équation à celle d'un système adjoint d'équations implicites en nombre infini et à une infinité d'inconnues

$$t_i = \lambda\, S_i(t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{52}$$

les S_i étant *des polynomes de degré n* par rapport à chacune des lettres t.

M. R. d'Adhémar ([2]), en prenant pour simplifier le cas de

([1]) G. Bratu, *Sur l'équation intégrale exponentielle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CLII, 18 avril 1911, p. 1048).

([2]) *Les fonctions implicites en nombre infini et l'équation intégrale non linéaire* (*Bull. Soc. math.*, 1908, p. 195).

l'équation intégrale de *deuxième degré*

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i Y_i \right] \varphi^2(y)\, dy = f(x),$$

et en employant la méthode des *approximations successives* de M. Picard, a démontré que cette équation admet une solution *holomorphe* autour de $\lambda = 0$.

Nous l'avons démontré au paragraphe 3, dans un cas plus général, à l'aide des majorantes.

18. *Équations intégrales de deuxième degré.* — Prenons l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi^2(y)\, dy + f(x), \tag{53}$$

dans laquelle $K(x, y)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et intégrables.

Si $f(x) \neq 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, on peut toujours ramener cette équation à la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi^2(y)\, dy + 1, \tag{54}$$

et en posant

$$S\varphi = \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy, \qquad (S = S\,1), \tag{55}$$

on a la suite des *approximations successives*

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \\ \varphi_1 &= 1 + \lambda S, \\ \varphi_2 &= 1 + \lambda S + 2\lambda^2 SS + \lambda^3 SS^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En général,

$$\varphi_n = 1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n + R_n = P_n + R_n, \tag{56}$$

les a étant des fonctions de x et R_n un polynome en λ de degré $2^n - 1$, contenant λ^{n+1} en facteur.

Dans toutes les fonctions φ_i, pour $i > n$, *le groupe des termes de degré au plus égal à* n *en* λ *est le polynome* P_n *de* φ_n.

La proposition est visiblement vraie pour $n = 1, 2, 3$. Supposons-la vraie jusqu'à n, on a alors

$$\varphi_{n+1} \doteq 1 + \lambda S(P_n + R_n)^2,$$

et, puisque par hypothèse,

$$P_n = P_{n-1} + a_n \lambda^n, \tag{57}$$

on peut écrire

$$\varphi_{n+1} = 1 + \lambda S(P_{n-1} + a_n \lambda^n + R_n)^2.$$

Par suite, tous les termes de φ_{n+1} *de degré au plus égal à* n en λ se trouvent dans l'expression λSP_{n-1}^2 ; mais ceux-ci sont précisément les termes de degré au plus égal à n dans φ_n.

Quant aux termes en λ^{n+1} de φ_{n+1}, ce sont ceux de λSP_n^2. On les obtient tous en faisant l'opération λS sur la somme des produits

$$a_n \times 1 + a_{n-1} a_1 + \ldots + a_1 a_{n-1} + 1 \times a_n$$

des coefficients des termes équidistants des extrêmes dans le polynome P_n.

La solution de l'équàtion intégrale (54) *est donc donnée par le développement*

$$\varphi(x, \lambda) = 1 + \lambda S + 2\lambda^2 SS + \lambda^3(4SSS + SS^2) + \ldots \tag{58}$$

uniformément convergent pour λ *suffisamment petit et* $0 \leqq x \leqq 1$.

Si le noyau $K(x, y)$ est réel et positif pour x et y compris entre 0 et 1, tous les coefficients de la série (58) sont *réels* et *positifs*, et l'on sait que le premier point singulier de ce développement est *sur l'axe réel* du côté des λ positifs ([1]).

19. Dans le cas de $f(x)$ quelconque, on trouve la solution

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n + \ldots \tag{59}$$

avec

$$a_1 = \int_0^1 K(x, y) f^2(y)\, dy = Sf^2,$$
$$a_2 = 2\,S(f\,Sf^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

([1]) J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique* (*Collection Scientia*).

et en général

$$a_n = S(a_{n-1}f + a_{n-2}a_1 + \ldots + f a_{n-1}),$$

comme on voit aussi par *identification*, en cherchant à satisfaire à l'équation (53) par un développement de la forme (59).

ÉQUATIONS INTÉGRALES TRANSCENDANTES.

20. *Équation exponentielle.* — Si dans l'équation (12) (§ 6) nous supposons

$$F[y, \varphi(y)] = e^{\varphi(y)},$$

on a l'équation transcendante

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, e^{\varphi(y)}\, dy + f(x), \tag{60}$$

que nous appelons *équation intégrale exponentielle*.

21. Pour $K(x, y) = 1$ et $f(x) = 0$, cette équation prend la forme élémentaire

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 e^{\varphi(y)}\, dy. \tag{61}$$

Par suite, φ est fonction de λ seul et l'on a

$$\varphi = \lambda e^{\varphi}. \tag{62}$$

En construisant cette courbe, on voit que pour chaque valeur réelle et *négative* de λ, l'équation (61) admet *une seule solution réelle*. Pour $\lambda > 0$, il y a deux régions distinctes : pour $\lambda < \frac{1}{e}$, l'équation (61) admet *deux solutions réelles;* pour $\lambda = \frac{1}{e}$, on a la solution *limite* $\varphi_1 = 1$; pour $\lambda > \frac{1}{e}$, les deux solutions deviennent *imaginaires*.

Pour toute valeur de $\lambda \neq \frac{1}{e}$, la solution φ est holomorphe en λ. Autour de $\lambda = \frac{1}{e}$, il y a *ramification*.

On vérifie facilement le théorème de Schmidt. La fonction déterminante étant dans ce cas

$$D(\lambda) = 1 - \lambda e,$$

$\lambda = \frac{1}{e}$ est bien *une constante caractéristique* du noyau

$$K(x, y)\, F'_{\varphi_1} = e^{\varphi_1} = e.$$

22. Considérons maintenant l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)\, B(y)\, e^{\varphi(y)}\, dy, \tag{63}$$

les fonctions données $A(x)$, $B(y)$ étant réelles et intégrables.

En posant

$$t = \lambda \int_0^1 B(y)\, e^{\varphi(y)}\, dy,$$

la méthode *des constantes indéterminées* donne

$$\varphi(x) = t\, A(x) \tag{64}$$

avec l'équation *adjointe*

$$t = \lambda \int_0^1 B(y)\, e^{t A(y)}\, dy = \lambda\, L(t). \tag{65}$$

Si $A(x) = B(x)$ (noyau symétrique), on a $L' > 0$, $L''' > 0$ et les fonctions L et L'' s'annulent pour une seule valeur *réelle* de t. Soit $L(\tau) = 0$, $L''(\theta) = 0$, et supposons pour fixer les idées

$$\tau < \theta, \qquad L(0) = \int_0^1 A(y)\, dy > 0.$$

La courbe représentée par l'équation (65) admet, dans ce cas, deux asymptotes $t = \tau$ et $\lambda = 0$. En prenant t pour abscisse, λ croît de 0 à $+\infty$ pour $-\infty < t < \tau$; pour $t > \tau$, λ croît de $-\infty$, s'annule pour $t = 0$, passe par un maximum λ_1 pour $t = t_1 > 0$ et décroît ensuite jusqu'à 0 pour $t > t_1$.

Par suite, l'équation exponentielle (63), avec $A = B$, admet :

Pour $\lambda < 0$, *une seule solution réelle;*
Pour $0 \leqq \lambda < \lambda_1$, *trois solutions réelles;*
Pour $\lambda > \lambda_1$, *une seule solution réelle.*

Pour $\lambda = \lambda_1$, il y a une solution *régulière* en λ et une solution *limite* de *biramification*.

Si $A(x) \neq B(x)$, toutes les valeurs t_i qui rendent λ maximum ou minimum sont données par les racines de l'équation

$$(66) \qquad \int_0^1 B(y)\,[t\,A(y)-1]\,e^{tA(y)}\,dy = 0.$$

Soit λ_i la valeur de λ correspondant à $t = t_i$. Si $L(0) \neq 0$ et si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ sont les zéros réels de $L(t)$, la courbe (65) admet les asymptotes $\lambda = 0$ et $t = \tau_i (i = 1, 2, \ldots, p)$. λ s'annule pour $t = 0$, $-\infty$ et $+\infty$, et en supposant le plan divisé en plusieurs régions par les asymptotes $t = \tau_i$, *la courbe reste du même côté de l'axe des t dans chacune de ces régions,* sauf dans celle qui contient l'origine.

D'où les conclusions suivantes :

Pour λ *voisin de zéro, l'équation intégrale exponentielle* (63) *admet une solution et une seule s'annulant avec* λ ; .

Pour $\lambda \neq 0$, *cette équation a en général plusieurs solutions* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\mu(x)$, *toutes de la forme* $t(\lambda)\,A(x)$.

Pour les *valeurs singulières* $\lambda = \lambda_i$, on a des *solutions limites.* Si $\lambda = \lambda_i$ est un *maximum* de l'ordonnée de la courbe (65), lorsque λ, en croissant, passe par la valeur λ_i, le nombre de solutions réelles de l'équation (63) *diminue de deux unités*, deux de ces solutions se confondant en une seule pour $\lambda = \lambda_i$ et devenant imaginaires pour $\lambda > \lambda_i$. Au contraire, si λ_i est un *minimum*, lorsque λ passe par λ_i en croissant, le nombre des solutions réelles de l'équation (63) *augmente de deux unités.*

Pour $\lambda = \pm\infty$, on a une autre espèce de solutions limites $\varphi = \tau_i A(x)$.

Si $L(0) = 0$, on peut avoir $L'(0) = 0$ ou $L'(0) \neq 0$. Dans les deux cas il existe un nombre positif h, tel que pour $-h < \lambda < +h$ l'équation (63) n'admet *aucune solution réelle* (sauf $\varphi \equiv 0$ pour $\lambda = 0$).

23. La même méthode permet de résoudre l'équation intégrale non linéaire

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)\,B(y)\,F[\varphi(y)]\,dy,$$

dans laquelle F est une *fonction entière* de φ. La solution est

$$\varphi(x) = t(\lambda)\,A(x),$$

$t(\lambda)$ étant la fonction implicite définie par l'équation adjointe

$$t = \lambda \int_0^1 B(y)\, F[t\, A(y)]\, dy.$$

24. *Noyau de M. Goursat.* — Soit l'équation intégrale transcendante

$$(67) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sum_{i=1}^{p} A_i(x)\, B_i(y)\, F[\varphi(y)]\, dy,$$

dans laquelle $F(\varphi)$ est une fonction *entière* en φ. En posant

$$t_i(\lambda) = \lambda \int_0^1 B_i(y)\, F[\varphi(y)]\, dy,$$

on trouve comme solution l'expression

$$(68) \qquad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} t_i(\lambda)\, A_i(x),$$

les fonctions t_i étant définies par le système *adjoint*

$$(69) \qquad \begin{cases} t_i = \lambda \displaystyle\int_0^1 B_i(y)\, F[A_1(y)t_1 + A_2(y)t_2 + \ldots + A_p(y)t_p]\, dy \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \end{cases}$$

dans lequel les seconds membres sont des séries entières, à coefficients constants, en $t_1, t_2, \ldots, t_p$.

Si l'on pose

$$(70) \qquad C_{ij} = \int_0^1 B_i(y)\, A_j(y)\, F'_\varphi(A_1 t_1 + A_2 t_2 + \ldots + A_p t_p)\, dy,$$

le déterminant fonctionnel du système (69) est

$$(71) \qquad D = \begin{vmatrix} \lambda C_{11} - 1 & \lambda C_{12} & \ldots & \lambda C_{1p} \\ \lambda C_{21} & \lambda C_{22} - 1 & \ldots & \lambda C_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda C_{p1} & \lambda C_{p2} & \ldots & \lambda C_{pp} - 1 \end{vmatrix}.$$

Les équations (69) sont vérifiées pour $\lambda = t_1 = t_2 = \ldots = t_p = 0$ et pour ces valeurs on a $D = (-1)^p$. Ces équations admettent donc un système de solutions

$$t_1 = t_1(\lambda), \qquad t_2 = t_2(\lambda), \qquad \ldots, \qquad t_p = t_p(\lambda)$$

holomorphes en λ autour de l'origine et s'annulant avec λ.

Dans le même domaine de λ, l'équation intégrale (67) admet la solution *régulière* et *nulle pour* $\lambda = 0$:

$$(72) \qquad \varphi(x) = t_1(\lambda)\,A_1(x) + t_2(\lambda)\,A_2(x) + \ldots + t_p(\lambda)\,A_p(x).$$

En général, si pour $\lambda = \lambda_0$, le système (69) admet les solutions $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_p^0$ et si le jacobien $D(\lambda, t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est différent de zéro pour ces valeurs, l'équation intégrale (67) admet une solution *régulière* autour de λ_0 et se réduisant en ce point à

$$\varphi_0(x) = t_1^0\,A_1(x) + t_2^0\,A_2(x) + \ldots + t_p^0\,A_p(x).$$

En éliminant $t_1, t_2, \ldots, t_p$ entre les équations (69) et (71), on obtient une équation en λ donnant toutes *les valeurs singulières*.

25. *Nouvelle forme du jacobien* (71). — En posant

$$(73) \qquad X_i = B_i, \qquad Y_i = A_i\,F'_\varphi(A_1 t_1 + A_2 t_2 + \ldots + A_p t_p),$$

les fonctions C_{ij} prennent la forme

$$C_{ij} = \int_0^1 X_i Y_j\,dy,$$

et, d'après un calcul développé par M. Goursat [1] dans le cas de l'équation de Fredholm, le déterminant (71) devient

$$D = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{(-1)^{p-\nu}}{\nu!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Delta_\nu\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_\nu,$$

Δ_ν étant un déterminant d'ordre ν, dont la première colonne est formée par les éléments

$$(74) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x_1)\,Y_1(x_1) + X_2(x_1)\,Y_2(x_1) + \ldots + X_\nu(x_1)\,Y_\nu(x_1), \\ X_1(x_2)\,Y_1(x_1) + X_2(x_2)\,Y_2(x_1) + \ldots + X_\nu(x_2)\,Y_\nu(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1(x_\nu)\,Y_1(x_1) + X_2(x_\nu)\,Y_2(x_1) + \ldots + X_\nu(x_\nu)\,Y_\nu(x_1), \end{array} \right.$$

[1] E. Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (*Bull. Soc. math.*, t. XXXV, 1907, p. 163).

et les autres colonnes s'en déduisent en remplaçant dans les fonctions Y_i la variable x_1 par $x_2, x_3, \ldots, x_\nu$.

D'après la forme (73) des fonctions Y_i, on remarque que, dans la colonne de rang i du déterminant Δ_ν, on peut mettre en facteur l'expression

$$F'_\varphi[A_1(x_i)t_1 + A_2(x_i)t_2 + \ldots + A_p(x_i)t_p]$$

et en employant la notation abrégée de M. Fredholm, on peut écrire

$$\Delta_\nu = K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_\nu \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_\nu \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{\nu} F'_\varphi[A_1(x_i)t_1 + \ldots + A_p(x_i)t_p].$$

En tenant compte de la formule (68), le jacobien (71) devient donc

$$(75)\quad D(\lambda, t_1, t_2, \ldots, t_p) = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{p-\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\nu \\ x_1, x_2, \ldots, x_\nu \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{\nu} F'_\varphi[\varphi(x_i)]\, dx_1 \ldots dx_\nu.$$

Cette expression n'est que le *déterminant de Fredholm* correspondant au noyau $K(x, y) F'_\varphi[\varphi(y)]$. On voit ainsi que *le théorème de M. Schmidt* pour l'équation intégrale transcendante (67) *se réduit au théorème classique appliqué au système adjoint de fonctions implicites* (69).

ÉQUATIONS INTÉGRALES DÉDUITES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

26. Considérons l'équation différentielle

$$(76)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda e^y = 0,$$

où λ est une constante *positive* et proposons-nous de trouver la solution $y(x)$ satisfaisant aux conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = m > 0$. Nous allons trouver que cette solution, nulle pour $x = 0$, *s'annule pour une seconde valeur* $x = b > 0$.

Au lieu des conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = m$, on peut se donner $y(0) = 0$ et $y(b) = 0$. Sous cette forme (¹) le problème

(¹) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, 1908, p. 100. — S. SANIELEVICI, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1908.

revient à la recherche des solutions de *l'équation intégrale exponentielle*

$$y(x) = \lambda \int_0^b G(x, \xi)\, e^{y(\xi)}\, d\xi, \tag{77}$$

dans laquelle b est un nombre positif donné et $G(x, \xi)$ désigne *la fonction de Green :*

$$\left\{\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} \qquad \text{pour } \xi < x, \\ G(x, \xi) &= \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} \qquad \text{pour } \xi > x. \end{aligned}\right. \tag{78}$$

27. En multipliant l'équation différentielle (76) par $2\,\frac{dy}{dx}$ et en intégrant entre o et x, avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = m$, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - m^2 + 2\lambda(e^y - 1) = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{m^2 - 2\lambda(e^y - 1)}. \tag{79}$$

Si l'on veut avoir la solution qui commence par être positive pour $x > 0$, on doit prendre le signe $+$ devant le radical.

En posant alors

$$t = 1 + \frac{m^2}{2\lambda}, \tag{80}$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\lambda}\,\sqrt{t - e^y},$$

d'où

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{t - e^y}}. \tag{81}$$

Comme, d'après (76), $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, la courbe $y = y(x)$ tourne sa concavité vers les y négatifs. La fonction y croît jusqu'à la valeur maximum

$$y = \log t, \tag{82}$$

où elle arrive effectivement pour

$$x = x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\log t} \frac{dy}{\sqrt{t - e^y}}. \tag{83}$$

En posant $e^y = u$, on voit que

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_1^t \frac{du}{u\sqrt{t-u}}$$

est une quantité *finie*.

Pour $x > x_1$, y décroît et l'on doit prendre le signe — devant le radical dans la formule (79). La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = x_1$ et y *redevient nul* pour

$$(84) \qquad x = b = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_1^t \frac{du}{u\sqrt{t-u}}.$$

L'équation fonctionnelle (81) *définit donc la solution* $y(x)$ *de l'équation* (76) *qui reste positive entre* o *et* b *et s'annule aux extrémités de cet intervalle.*

La formule (84) donne b en fonction de t (ou de m) et de λ. En posant $t - u = v^2$, nous trouvons

$$b = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\sqrt{t-1}} \frac{2\,dv}{t-v^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda t}} \log \frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}-\sqrt{t-1}},$$

ou encore

$$(85) \qquad b = 2\sqrt{\frac{2}{\lambda t}} \log\left[\sqrt{t}+\sqrt{t-1}\right].$$

Pour $t = 1$ ($m = 0$), on a $b = 0$.

Pour $t > 1$, comme $u^2 > 2(u-1)$ et, comme pour $u \geqq 1$,

$$\frac{1}{u} < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{u-1}},$$

on a

$$\int_1^t \frac{du}{u\sqrt{t-u}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^t \frac{du}{\sqrt{(u-1)(t-u)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

et la formule (84) donne

$$(86) \qquad b < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

Pour $t = \infty$ ($m = \infty$), on a $b = 0$.

Par suite, *lorsque le coefficient angulaire* m *varie entre* o *et* $+\infty$, b *passe par un maximum.*

28. Considérons maintenant l'équation linéaire [1]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \tag{87}$$

et posons $b_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Cette équation admet, comme intégrale nulle en 0 et en b et positive ou nulle pour $0 < x < b$, la solution $y = 0$ pour $b \leqq b_1$ et $y = \sin(x\sqrt{\lambda})$ pour $b = b_1$.

En comparant l'équation linéaire (87) avec l'équation exponentielle (76), l'inégalité (86) donne $b < b_1$.

29. Reprenons la formule (85) et soit β *le maximum de b*. On a

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \frac{\log(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})}{\sqrt{t}}$$

et

$$\frac{db}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{t\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{\sqrt{t-1}} - \frac{\log(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})}{\sqrt{t}}\right]. \tag{88}$$

Pour $t = 1$, on a $b'_t = \infty$.

Pour $t > 1$, b'_t est positif tant qu'on a

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t}} \log(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) < 1. \tag{89}$$

Or la fonction $\varphi(t)$, nulle pour $t = 1$, croît avec t pour $t > 1$, et, pour $t = \tau = 3,2766\ldots$, on a $\varphi(\tau) = 1$, $b'_t = 0$. Pour $t > \tau$, b'_t est négatif et pour $t = +\infty$, on a de nouveau $b'_t = 0$.

Pour $t = \tau$, b passe par un *maximum*

$$\beta = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}, \qquad h = 1,8745\ldots. \tag{90}$$

Pour $b = \beta$, le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est $\mu = 2,1338\ldots\sqrt{\lambda}$.

30. Soit $\lambda = 1$. Pour $m < \mu$, la courbe $y = y(x)$ part de l'origine, présente un maximum $y = \log t$ et vient couper de nouveau l'axe des x en un point B d'abscisse $b < \beta$. Lorque m croît, t, b

---

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. III, p. 114.

et l'ordonnée maximum de la courbe *croissent;* le point B, sur l'axe des x, *s'approche du point* B_1 *d'abscisse* β.

Pour $m = \mu$, B est en B_1. Pour $m > \mu$, l'ordonnée maximum de la courbe croît toujours, mais b *diminue;* le point B revient vers l'origine.

Nous retrouvons donc, après M. Picard [1], comme nombre des solutions de l'équation différentielle (76) s'annulant en $x = 0$ et $x = b$:

Pour $b < \beta$, *deux solutions* C_1, C_2;
Pour $b = \beta$, *une seule solution* C;
Pour $b > \beta$, *aucune solution.*

Lorsque B tend vers B_1 les deux solutions C_1, C_2 tendent vers la solution *limite* C.

31. Si nous supposons b comme *donné* et λ variable, pour chaque valeur de λ, les formules (85) et (90) déterminent les quantités t et β. Posons

$$(91)\qquad \lambda_1 = \frac{h^2}{b^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{h}{\sqrt{\lambda_1}} = b.$$

En comparant les formules (90) et 91) et en tenant compte des conclusions du paragraphe précédent, on voit que :

1° Si $\lambda < \lambda_1$, on a $b < \beta$ et l'équation différentielle (76) admet deux solutions s'annulant pour $x = 0$ et $x = b$;

2° Si $\lambda = \lambda_1$, les deux solutions se confondent;

3° Si $\lambda > \lambda_1$, on a $\beta < b$ et l'équation (76) n'admet plus de solution s'annulant en o et b.

On en déduit pour *l'équation intégrale exponentielle* (77)

$$y(x) = \lambda \int_0^b G(x, \xi)\, e^{y(\xi)}\, d\xi$$

les conclusions suivantes :

1° *Pour chaque valeur de* λ *comprise entre* o *et*

$$\lambda_1 = \frac{(1{,}8745\ldots)^2}{b^2},$$

---

[1] *Sur certains exemples singuliers d'approximations successives* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXXVI, 14 février 1898, p. 497).

cette équation a deux solutions réelles et distinctes. Ces courbes C_1 *et* C_2, de forme parabolique, tournent leur concavité vers les y négatifs et passent par les points $x = 0$ et $x = b$ de l'axe des x.

2° Lorsque λ tend vers λ_1, ces deux courbes tendent vers une position *limite* C *comprise entre* C_1 *et* C_2.

3° *Pour* $\lambda = \lambda_1$, *on a la solution limite* C.

4° *Pour* $\lambda > \lambda_1$, *l'équation intégrale n'admet plus de solution réelle.*