BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur une fonction implicite

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR UNE FONCTION IMPLICITE;

PAR M. ÉD. GOURSAT.

Dans une séance de la Société mathématique (8 janvier 1913), M. Andoyer, à propos d'une question classique d'Astronomie, a posé la question suivante : Trouver les rayons des cercles de convergence associés des séries entières qui représentent les développements des fonctions implicites $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, se réduisant à zéro pour $x = y = 0$, et vérifiant les deux équations

$$(1) \qquad x = z_1 e^{z_2 - z_1}, \qquad y = - z_2 e^{z_1 - z_2}.$$

Une combinaison immédiate ramène la résolution de ce système à celle de l'équation unique

$$(2) \qquad x e^{v} + y e^{-v} = v,$$

où $v = z_1 - z_2$. Soit $v = S(x, y)$ la série entière qui représente le développement de la racine v de l'équation (2) qui est nulle à l'origine. Tout système de deux nombres positifs R, R', tels que la série $S(x,y)$ soit convergente si l'on a à la fois $|x| < R$, $|y| < R'$, et divergente si l'on a à la fois $|x| > R$, $|y| > R'$, constitue un système de rayons de convergence associés. La question sera résolue si l'on connaît la courbe Γ du plan des XY décrite par le point de coordonnées $X = R$, $Y = R'$, R et R' étant deux nombres positifs satisfaisant à la condition précédente. La détermination de cette courbe Γ, qui est en général difficile, est très facile dans le cas actuel.

LEMME. — *Soient* R, R', ρ *trois nombres positifs tels que l'on* *ait en même temps*

$$\text{(3)} \qquad R\,e^{\rho} + R'\,e^{-\rho} \leqq \rho, \qquad R\,e^{-\rho} + R'\,e^{\rho} \leqq \rho;$$

l'équation (2) *a une racine et une seule de module inférieur à* ρ, *pourvu que l'on ait* $|x| < R$, $|y| < R'$.

Il suffit de prouver que, tout le long du cercle de rayon ρ décrit de l'origine comme centre dans le plan de la variable v, on a

$$|x\,e^{v} + y\,e^{-v}| < \rho.$$

Or on a, le long de ce cercle,

$$|x\,e^{v} + y\,e^{-v}| < R\,e^{\rho \cos\varphi} + R'\,e^{-\rho\cos\varphi},$$

φ désignant l'argument de v, et le maximum du second membre est l'un des deux nombres $R\,e^{\rho} + R'\,e^{-\rho}$, $R\,e^{-\rho} + R'\,e^{\rho}$, suivant que l'on a $R \gtrless R'$. Si les inégalités (3) sont vérifiées, l'équation (2) a donc une racine et une seule $v_1(x, y)$ de module inférieur à ρ. Cette racine est une fonction holomorphe des variables x et y, à l'intérieur des cercles de rayons R et R' respectivement décrits des points $x = 0$, $y = 0$, dans les plans de ces deux variables, et l'on peut avoir son développement en série par la formule de Lagrange généralisée. Soit $\Pi(v)$ une fonction holomorphe dans le cercle de rayon ρ; on a, d'après la théorie des résidus,

$$\text{(4)} \qquad \frac{\Pi(v_1)}{1 - x\,e^{v_1} + y\,e^{-v_1}} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Pi(v)\,dv}{v - x\,e^{v} - y\,e^{-v}},$$

l'intégrale étant prise suivant le cercle de rayon ρ.

La méthode classique d'Hermite pour établir la formule de Lagrange s'étend sans aucune difficulté à l'intégrale (4) et prouve que cette intégrale est développable en série entière convergente dans les cercles de rayons R et R' respectivement. En particulier, si l'on pose $\Pi(v) = v(1 - x\,e^{v} + y\,e^{-v})$, il vient

$$\text{(5)} \qquad v_1(x, y) = \sum \frac{(m-n)^{m+n-1}}{m!\,n!}\,x^m y^n,$$

en excluant de la sommation la combinaison $m = n = 0$, et en posant $0! = 1$.

La série (5) est donc absolument convergente pour un système de valeurs des variables x et y, s'il existe un nombre positif ρ satisfaisant aux deux conditions

$$(6) \qquad |x|\,e^{\rho}+|y|\,e^{-\rho}<\rho, \qquad |x|\,e^{-\rho}+|y|\,e^{\rho}<\rho.$$

Pour interpréter géométriquement ces conditions, considérons la famille de droites représentées par l'équation

$$(7) \qquad \mathrm{X}\,e^{\rho}+\mathrm{Y}\,e^{-\rho}=\rho,$$

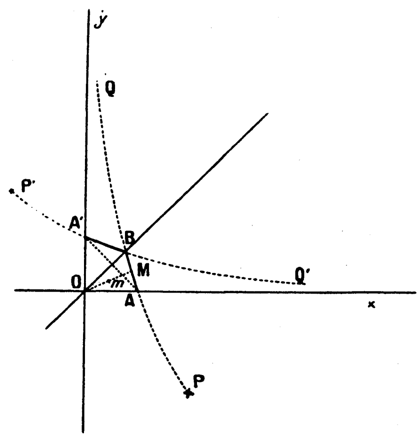
où ρ est un paramètre auquel il suffit de donner des valeurs positives. L'enveloppe de ces droites est une courbe Γ représentée par les deux équations

$$(8) \qquad \mathrm{X}=\frac{\rho+1}{2}e^{-\rho}, \qquad \mathrm{Y}=\frac{\rho-1}{2}e^{\rho};$$

lorsque ρ varie de 0 à $+\infty$, le point (X, Y) part du point P de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et décrit une branche infinie PAQ asymptote à l'axe des y, tournant sa convexité vers le bas, et coupant l'axe OX au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$. L'enveloppe de la droite

$$\mathrm{X}\,e^{-\rho}+\mathrm{Y}\,e^{\rho}=\rho,$$

symétrique de la première par rapport à la bissectrice de l'angle



XOY, est une courbe P′A′Q′ symétrique de PAQ par rapport à la même droite. Ces deux branches de courbe se coupent en un point B situé sur la bissectrice, et la valeur de ρ correspondante est racine de l'équation $(\rho - 1)\, e^{2\rho} = \rho + 1$; cette racine ρ_1, calculée par Stieltjes, a pour valeur approchée $1,199\ldots$

La courbe Γ formée par la réunion des deux arcs AB, BA′ est la courbe séparatrice cherchée. Soit en effet m un point de coordonnées X, Y situé à l'intérieur du contour OABO ; la droite Om rencontre l'arc AB en un point M de coordonnées (R, R′) pour lequel $R > X$, $R' > Y$. Soit ρ la valeur du paramètre qui correspond à ce point M. Le point m étant situé du même côté que l'origine par rapport à la tangente en M à l'arc AB, on a bien

$$X e^{\rho} + Y e^{-\rho} - \rho < 0,$$

et par suite on a *a fortiori*

$$X e^{-\rho} + Y e^{\rho} - \rho < 0,$$

puisque $X > Y$.

La série (5) est donc absolument convergente si l'on a

$$|x| = X, \qquad |y| = Y.$$

Le raisonnement serait le même pour un point situé de l'autre côté de la bissectrice, et par suite *la série* (5) *est absolument convergente si le point de coordonnées* $|x|$, $|y|$ *est situé entre l'origine et la courbe* ABA′.

La série (5) ne peut être absolument convergente pour un point situé en dehors de cette région. Il suffit de prouver que la racine $v_1(x, y)$ qui est nulle pour $x = y = 0$ n'est pas holomorphe dans le voisinage du système de valeurs $x = R$, $y = R'$, R et R′ étant les coordonnées d'un point M de la courbe séparatrice Γ. Si nous posons en effet $x = \lambda R$, $y = \lambda R'$, v devient une fonction de la variable λ, définie par l'équation

$$v = \lambda(R e^{v} + R' e^{-v}),$$

que l'on peut encore écrire, en désignant par ρ la valeur du paramètre qui correspond au point M de Γ,

$$(9) \qquad \lambda = \frac{v}{\frac{\rho+1}{2} e^{v-\rho} + \frac{\rho-1}{2} e^{-(v-\rho)}}.$$

La discussion de cette équation est facile, en construisant par exemple la courbe représentative. A toute valeur réelle de λ comprise entre 0 et 1 correspondent une racine de l'équation en v inférieure à ρ et une racine supérieure à ρ. Ces deux racines viennent se confondre pour $\lambda = 1$, qui est par conséquent une valeur critique pour la fonction implicite v de λ définie par l'équation (9). La fonction $v_1(x, y)$ ne peut donc rester une fonction holomorphe des variables x et y dans le voisinage du système de valeurs $x = \mathrm{R}$, $y = \mathrm{R}'$.

Remarques. — I. La droite AA' est située tout entière au-dessous de la courbe ABA'. Par conséquent, la série (5) est certainement convergente si l'on a $|x| + |y| < \frac{1}{e}$. Ce résultat est facile à établir directement en partant de l'équation (2). Il est clair en effet que la fonction $(x+y)e^v$ est majorante pour le second membre. Par suite la série (5) sera certainement convergente si le développement en série entière de la racine $\mathrm{V}(x,y)$ de l'équation auxiliaire

$$\mathrm{V}(x, y) = (x+y)\,e^{\mathrm{V}} \tag{10}$$

est lui-même convergent. Or ce développement, donné par la formule de Lagrange, est

$$\sum \frac{m^{m-1}}{m!}(x+y)^m.$$

En posant $x + y = u$, on a une série entière en u qui est convergente, d'après la règle de D'Alembert, si l'on a $|u| < \frac{1}{e}$. Considérée comme une série entière à deux variables x et y, elle est donc absolument convergente si l'on a

$$|x| + |y| < \frac{1}{e}.$$

II. Dans le cas particulier où l'on a $|x| = |y|$, le point de coordonnées $|x|$, $|y|$ est sur la bissectrice, et la série (5) sera convergente pourvu que ce point soit situé entre l'origine et le point B, c'est-à-dire pourvu que $|x|$ soit plus petit que l'abscisse du point B. Or cette abscisse, calculée aussi par Stieltjes, a pour valeur approchée $\frac{0{,}662\ldots}{2}$. Cette circonstance se présente justement pour l'équation de Képler

$$z - a - \alpha \sin z = 0$$

que l'on peut écrire, en posant $z = a + iv$,

$$v = \alpha \frac{e^{-ia}}{2} e^{v} - \alpha \frac{e^{ia}}{2} e^{-v}.$$

Les valeurs de x et de y ont ici le même module, et l'on se trouve bien dans le cas particulier considéré. On en déduit bien aisément les résultats classiques.

III. La méthode précédente s'étend sans difficulté à une équation de la forme $v = xf(v) + y\varphi(v)$, $f(v)$ et $\varphi(v)$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine, pourvu qu'on puisse déterminer le maximum du module du second membre, lorsque v décrit un cercle ayant l'origine pour centre.