P. APPELL

Sur les polynômes se rattachant à l'équation différentielle $y'' = 6y^2 + x$

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 150-153
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__150_0>

SUR DES POLYNOMES SE RATTACHANT A L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' = 6y^2 + x$;

PAR M. PAUL APPELL.

I. On connaît les belles recherches de M. Painlevé ([1]) et de ses disciples ([2]) sur les équations différentielles à points critiques fixes. Dans l'intégration par séries de la plus simple d'entre elles,

$$(1) \qquad y'' = 6y^2 + x,$$

interviennent d'une façon particulière les multiples de 5, comme l'a montré M. Boutroux ([3]) en étudiant deux solutions particulières remarquables.

II. M. Painlevé a étudié le premier (*loc. cit. : Bulletin de la Société mathématique*) une solution de la forme

$$(2) \quad y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x - x_0)^2 - \frac{1}{6}(x - x_0)^3 + h(x - x_0)^4 + \ldots,$$

où x_0 est une constante quelconque; il a montré que le coefficient h est arbitraire. Les coefficients suivants sont des polynomes en x_0 et h, sur lesquels je voudrais présenter quelques remarques. Je me borne ici au cas où $x_0 = 0$, laissant le cas général pour une autre étude. Il s'agit alors d'une solution de la forme

$$(3) \qquad y = \frac{1}{x^2} + x^3(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots).$$

La substitution dans l'équation donne les premiers coefficients, a_2 étant arbitraire ($a_2 = h$). D'une façon générale, on a la formule

---

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, 1900, p. 201-261, et *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 1-85.

([2]) Nous renverrons pour la bibliographie à l'intéressante Thèse de M. Garnier *Sur des équations différentielles de troisième ordre* .... Paris, Gauthier-Villars; 1911.

([3]) *Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXX, 1913, p. 336-340).

récurrente

$$(4)\qquad (n-2)(n+5)a_n = 6[2a_1 a_{n-5} + 2a_2 a_{n-6} + \ldots],$$

où le dernier terme entre crochets est $2a_{\frac{n-5}{2}}a_{\frac{n-3}{2}}$ quand n est impair et $a^2_{\frac{n-4}{2}}$ quand n est pair.

L'application répétée de la formule (4) fournit les coefficients successifs; nous donnons ci-dessous le Tableau des premiers d'entre entre eux, rangés en cinq colonnes verticales; dans la première figurent les coefficients a_n pour lesquels $n \equiv 1 \pmod 5$; dans la deuxième les coefficients pour lesquels $n \equiv 2 \pmod 5$, etc., dans la cinquième les coefficients pour lesquels $n \equiv 0 \pmod 5$.

$n = 5k+1$.	$n = 5k+2$.	$n = 5k+3$.	$n = 5k+4$.	$n = 5k$.
$a_1 = -\frac{1}{2.3}$	$a_2 = h$	$a_3 = 0$	$a_4 = 0$	$a_5 = 0$
$a_6 = \frac{1}{2^3.3.11}$	$a_7 = -\frac{h}{2.3.5}$	$a_8 = \frac{h^2}{13}$	$a_9 = 0$	$a_{10} = 0$
$a_{11} = -\frac{1}{2^6.3^3.11}$	$a_{12} = \frac{37h}{2^2.3.5^2.11}$	$a_{13} = -\frac{2h^2}{5.11.13}$	$a_{14} = \frac{h^3}{13.19}$	$a_{15} = 0$
$a_{16} = \frac{5}{2^4.3^4.7^2.11^2}$	$a_{17} = -\frac{ph}{q}$	$a_{18} = \frac{p'h^2}{q'}$	$a_{19} = -\frac{p''h^3}{q''}$	$a_{20} = \frac{3h^4}{5.13^2.19}$

Les coefficients a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25} sont de même des constantes numériques multipliées respectivement par h^0, h, h^2, h^3, h^4. En général le coefficient a_n est un polynome en h. Si

$$n \equiv p \pmod 5; \qquad p = 1, 2, 3, 4, 5,$$

le coefficient a_n contient uniquement des puissances de h de la forme h^{5k+p-1} ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$); a_n peut donc s'écrire

$$(5)\qquad a_n = h^{p-1} P_n(h^5),$$

$P_n(h^5)$ désignant un polynome contenant uniquement des puissances de h^5 et ayant tous ses coefficients du signe de $(-1)^n$.

On démontre cette proposition en montrant que, si la propriété est vraie pour a_{n-5}, a_{n-10}, a_{n-15}, ..., elle l'est aussi pour a_n. Comme elle est vraie, d'après le Tableau, pour les premiers coefficients, elle le sera alors pour tous.

Dans la formule récurrente (4), en supposant $n \equiv p \pmod 5$, on voit que tous les termes du second membre $a_1 a_{n-5}$, $a_2 a_{n-6}$, ... sont de la forme $h^{p-1}\mathrm{P}(h^5)$ d'après la formule (5) supposée vraie pour a_1 et a_{n-5}, a_2 et a_{n-6}, a_3 et a_{n-7}, ...; cette forme est donc vraie pour a_n.

Soit ω une racine cinquième de l'unité : si l'on remplace x par ωx et h par ωh, y est remplacée par $\omega^3 y$. On peut vérifier directement, sur l'équation différentielle, que le changement de x en ωx, et de y en $\omega^3 y$ n'altère pas l'équation.

Si l'on donne à h la valeur *zéro*, $h = 0$, le développement devient (*voir* Boutroux, *loc. cit.*)

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{264}x^8 - \frac{1}{19008}x^{13} + \frac{5}{7683984}x^{18} + \ldots,$$

où ne figurent que des puissances de x de la forme $5k - 2$.

On peut aussi calculer directement les coefficients de Y, en cherchant une solution de la forme

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{x^2} + x^3 \varphi(x^5);$$

puis les premiers coefficients a_n pour lesquels $n = 5k + 2$, en remarquant que la fonction $\mathrm{Y}_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial h}\right)_0$, détermination de $\frac{\partial y}{\partial h}$ pour $h = 0$, vérifie l'équation

$$\mathrm{Y}_1'' = 12\,\mathrm{Y}\mathrm{Y}_1.$$

Le cas où x_0 est différent de zéro, se traite de la même façon en faisant d'abord $x - x_0 = t$, ce qui donne

$$y'' = 6y^2 + t + x_0,$$

les dérivées étant prises par rapport à t.

III. La seconde équation de M. Painlevé

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha \tag{6}$$

conduit à des résultats de même nature, le nombre 3 jouant un rôle analogue à celui du nombre 5 pour l'équation (1). C'est ce qu'on voit *a priori* en remarquant que, si ω est une racine cubique de l'unité, l'équation (6) ne change pas si l'on remplace x par ωx et y par $\omega^2 y$.

On voit, en particulier, que l'équation (6) admet une solution de la forme

$$y = \frac{1}{x} + x^2 F(x^3),$$

$F(x^3)$ étant une série entière en x^3 :

$$F(x^3) = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \ldots.$$

Un calcul facile donne, en substituant dans (6) et réduisant, la relation

$$\begin{aligned} &9x^6 F''(x^3) + 18x^3 F'(x^3) \\ &\quad = 4F(x^3) + 6x^3 F^2(x^3) + 2x^6 F^3(x^3) + x^3 F(x^3) + 1 + \alpha, \end{aligned}$$

qui, en posant $x^3 = z$, permet de calculer les coefficients de la série $F(z)$.