Bulletin de la S. M. F.

E. Borel

Sur les définitions analytiques et sur l'illusion du transfini

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 42-47

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__42_1>

SUR LES DÉFINITIONS ANALYTIQUES ET SUR L'ILLUSION DU TRANSFINI;

Par M. Émile Borel.

I. — La « définition » d'une fonction non représentable analytiquement déduite de la « définition » des nombres de seconde classe.

J'ai, à maintes reprises, attiré l'attention sur ce fait qu'on ne peut pas fixer, au moyen d'un nombre fini de mots, un procédé de construction ou de notation de tous les nombres de seconde classe. Les difficultés sont *exactement les mêmes* pour définir une échelle transfinie de types croissants, c'est-à-dire une suite transfinie de fonctions déterminées telles que chacune ait une croissance asymptotiquement supérieure aux précédentes et telles que toute fonction donnée soit dépassée en croissance asymptotique par une fonction de la suite. Si, pour fixer les idées, on fait correspondre aux nombres ordinaires n les fonctions x^n, on fera correspondre à ω la fonction x^x et à tout nombre α de seconde classe une fonction bien déterminée, définie pour les valeurs entières de la variable et construite au moyen d'itérations et de l'emploi du théorème de Paul du Bois-Reymond [sous la forme $\Psi(x) = \varphi_x(x)$] de la même manière que le nombre α au moyen d'additions et de passages à la limite.

Cette « définition » des nombres de seconde classe au moyen d'une échelle de types croissants met en évidence les difficultés que soulève une telle « définition »; mais elle ne les augmente pas.

A tout nombre incommensurable, on peut faire correspondre de bien des manières une fonction croissante, définie pour les valeurs entières de la variable. On peut par exemple le développer en fraction continue et considérer la fonction croissante définie en prenant pour chaque valeur de n le plus grand des quotients incomplets a_1, a_2, ..., a_n. Si cette fonction reste finie pour n infini, c'est qu'il y a au moins une valeur entière p telle qu'une infinité des a_n soient égaux à p; on considérera le plus petit des nombres p ayant cette propriété et l'on appellera a_m le $n^{\text{ième}}$ quotient incomplet égal à p; m est une fonction croissante de n. On pourrait aussi écrire le nombre incommensurable sous forme de fraction décimale et considérer les rangs successifs du plus petit de celui des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 qui figure une infinité de fois.

Il est clair que, quelle que soit la fonction croissante d'entiers $\varphi(n)$, on peut construire effectivement un nombre incommensurable qui correspond à cette fonction.

On peut, d'autre part, à tout nombre incommensurable faire correspondre un entier q qui sera, par exemple, le plus petit des rangs du plus petit des nombres entiers qui figure parmi les quotients incomplets ou les chiffres décimaux. Parmi les nombres incommensurables auxquels correspond la fonction $\varphi(n)$, on peut en construire pour lesquels l'entier q correspondant dépasse tout entier donné à l'avance.

Supposons maintenant que nous considérions comme définie une suite transfinie de fonctions croissantes $\varphi_\alpha(n)$ correspondant aux divers nombres de seconde classe α. J'insiste encore sur le fait que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse que font tous ceux des mathématiciens qui considèrent comme définie la suite des α. Je ne renouvelle pas les réserves que j'ai faites sur ces « définitions ».

A tout nombre incommensurable x, compris entre o et 1, nous avons fait correspondre une fonction croissante déterminée $\varphi(n)$; soit α le plus petit nombre de seconde classe tel que $\varphi_\alpha(n)$ croisse plus vite que $\varphi(n)$; nous ferons correspondre à x le nombre α. Si nous posons, d'autre part,

$$f(x) = \varphi_\alpha(q),$$

le nombre entier q étant défini comme nous l'avons dit plus haut, la fonction $f(x)$ échappe à toute représentation analytique, bien qu'elle puisse être calculée pour les nombres x dont le développement en fraction continue ou en fraction décimale est asymptotiquement connu. Mais la représentation analytique complète de $f(x)$ exigerait la définition précise de toutes les fonctions $\varphi_\alpha(n)$ et nous savons que cette définition est impossible.

II. — L'illusion des « définitions » analytiques qui font intervenir des séries dont la convergence n'est pas connue avec précision.

Au sujet des définitions ou représentations analytiques, quelques remarques simples permettent de mettre en évidence l'illusion qu'il y a dans les définitions générales où l'on fait intervenir des séries qui convergent sans qu'on ait aucun renseignement sur la nature de leur convergence.

L'exemple le plus simple d'une telle série est une suite dont tous les éléments sont égaux à o ou à 1. Pour chaque valeur de n, on a, ou bien

$$a_n = 0,$$

ou bien

$$a_n = 1.$$

Trois cas sont donc possibles, ou la suite a_n a pour limite o, ou elle a pour limite 1, ou elle n'a pas de limite. Le problème de savoir dans lequel de ces trois cas on se trouve dépend évidemment de la manière dont sont définis les a_n. Il est plus ou moins difficile, plus ou moins compliqué, parfois aisé et parfois insoluble. Mais *on ne fait pas faire un pas à ce problème* en remplaçant son énoncé en langage vulgaire, qui vient d'être donné, par une formule analytique, aisée à donner de bien des manières. Si l'on pose

$$x_n = 1 + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n|,$$

la suite des x_n tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ suivant que la suite des a_n a ou n'a pas une limite. Si donc on pose

$$x = \lim \frac{1}{x_n},$$

la valeur de x sera ou un nombre fini o suivant que la suite des a_n a ou n'a pas une limite. Il est facile de définir une fonction $y(x)$ telle que $y = 1$ si $x \neq 0$ et $y = 0$ si $x = 0$; la fonction y sera donc 1 ou 0, suivant que la suite des a_n a une limite ou n'a pas de limite. La série

$$y + a_1 y + (a_2 - a_1)y + \ldots + (a_n - a_{n-1})y + \ldots$$

est donc convergente quelle que soit la suite donnée; sa somme est 0 si la suite des a_n n'a pas de limite, 1 si cette suite a pour limite 0, et 2 si cette suite a pour limite 1.

Si nous considérons maintenant une suite quelconque de nombres réels

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

il est facile de définir une fonction $\varphi(x)$ égale à 0 ou à 1 suivant que x est compris ou n'est pas compris dans un certain intervalle ab. En prenant $a_n = \varphi(x_n)$ et utilisant les résultats précédents, en choisissant successivement pour ab tous les intervalles de dimension $\frac{1}{2^p}$ en lesquels on peut diviser l'intervalle $-\infty$, $+\infty$ et faisant augmenter p indéfiniment, on définira analytiquement sans peine en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ un nombre x égal à la limite de x_n dans le cas où cette limite existe et égal, par exemple, au nombre imaginaire i lorsque cette limite n'existe pas. L'emploi d'une telle fonction permettrait de donner en apparence une forme analytique à certaines définitions, en apparence plus compliquées, dans lesquelles on fait intervenir, parmi certaines séries, celles seulement qui convergent ([1]).

Mais ces exemples simples, dans lesquels on dissèque en quelque sorte le mode de construction effectif des expressions analytiques font bien voir ce qu'il y a d'artificiel dans de telles expressions. La fonction $y(x)$ qui est égale à 1 pour $x = 0$ et à 0 pour $x \neq 0$ n'est pas, bien entendu, continue; une représentation analytique de cette fonction, non seulement n'apprend rien de plus que sa définition, mais apprend beaucoup moins; pour savoir quelle est la valeur de y, il faut savoir si x est égal à 0 ou est différent de 0 et, si x est donné comme limite d'une suite, il faut précisément faire une étude directe de cette suite.

III. — Les nombres incommensurables et l'illusion du transfini.

Revenons-en à l'illusion du transfini. Il est aisé de donner des formules analytiques faisant connaître les valeurs successives des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ qui sont les quotients incomplets ou les chiffres décimaux d'un développement de x en fraction continue ou en fraction décimale. Ces formules sont d'ailleurs calculables, lorsqu'on sait qu'elles représentent des entiers. Mais toutes les questions asymptotiques qu'on peut se poser sur la suite des a_m se ramènent à des problèmes réels dont la solution n'est pas avancée si on les traduit sous forme analytique.

Je ne reviendrai pas sur le paradoxe du transfini, sur lequel je me suis déjà expliqué ([2]), mais il n'est pas superflu d'observer que, quels que soient les nombres transfinis α, qu'on aura définis au moyen de moins de 10000 mots, par exemple, on pourra définir un nombre x dont le développement introduit une fonction croissante dépassant toutes les fonctions $\varphi_\alpha(n)$; mais la considération effective d'un tel nombre x est aussi compliquée que la considération de la fonction croissante correspondante; il y

---

(1) *Voir* par exemple la Note *Sur l'existence des fonctions de classe quelconque* dans mon livre *Leçons sur les fonctions de variable réelle.*

(2) *Voir* notamment la Note IV de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2e édition.

aura au moins autant de complication à définir le nombre x, si on le définit par la suite des a_n, qu'il peut y en avoir à l'étudier, si, par impossible, on le définit par une équation transcendante, par exemple, et si l'on arrive d'après cette définition à connaître les propriétés asymptotiques des a_n (ce qui est bien invraisemblable). De toute façon, il faudra pour calculer les valeurs de $\varphi_\beta(q)$ qui correspondent aux divers nombres x pour lesquels la croissance asymptotique n'est pas inférieure à $\varphi_\beta(x)$ et est inférieure à $\varphi_{\beta+1}(x)$, il faudra, dis-je, avoir poussé jusqu'à β la définition des nombres transfinis. Cela sera nécessaire aussi pour définir β au moyen de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$; il faudra une superposition de passages à la limite de complication au moins β, c'est-à-dire une fonction de classe au moins β dans la classification de M. Baire.

Le lecteur ne comparera pas sans intérêt ces considérations avec celles par lesquelles M. Lebesgue est arrivé à « nommer » une fonction non définissable analytiquement [1]. Le procédé que j'emploie me paraît, à certains égards, préférable au sien; mais le sien présente certains avantages pour ceux qui ne partagent pas en tous points mes idées sur l'illusion du transfini.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 1905.