

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN COUGNARD

**Sur l'anneau des entiers des extensions galoisiennes
non abéliennes de degré pq des rationnels**

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 33-34

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__33_0

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ANNEAU DES ENTIERS DES EXTENSIONS GALOISIENNES
 NON ABELIENNES DE DEGRE pq DES RATIONNELS

par

Jean COUGNARD

-:-:-

Soit N une extension galoisienne, non abélienne, de degré pq (p et q premiers) du corps \mathbb{Q} des rationnels. Le groupe de Galois G de N/\mathbb{Q} est engendré par deux éléments σ et τ vérifiant $\sigma^p = \tau^q = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^r$ avec $q|p-1$ et $r \neq 1$, $r^q \equiv 1 \pmod{p}$. On pose $H = \langle \sigma \rangle$, $g = \langle \tau \rangle$, et on désigne par K (resp k) le corps invariant par g (resp H). Le groupe g opère sur H par automorphismes intérieurs et il existe $\frac{p-1}{q}$ éléments i_ℓ tels que les orbites soient, outre l'élément neutre, les $\sigma^{i_\ell r^t}$ (t variant de 1 à q). On appelle \mathbb{Z}_1 la sous-algèbre de $\mathbb{Z}[G]$ engendrée par les $\sum_{t=1}^q \sigma^{i_\ell r^t}$ ($\ell = 1, \dots, \frac{p-1}{q}$) et on pose $T = \sum_{\ell=0}^{p-1} \sigma^\ell$.

Soit $\mathbb{Q}(\zeta)$ le p -ième corps cyclotomique, \mathbb{Q}_0 le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta)$ de degré $\frac{p-1}{q}$ sur \mathbb{Q} . On suppose pour cet exposé que k n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}(\zeta)$; on note A_K (resp A_N , resp A_0) la clôture intégrale de \mathbb{Z} dans K (resp N , resp \mathbb{Q}_0).

LEMME. - $\mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}[T]$ possède une structure d'anneau de Dedekind ; il est isomorphe de façon non canonique à A_0 .

PROPOSITION. - A_K/\mathbb{Z} est un module sur A_0 .

On se propose d'étudier la structure de ce module ; pour cela on introduit des résolvantes de Lagrange.

DEFINITION. - Pour tout élément θ de K et tout caractère χ de H , on définit la résolvante de Lagrange de θ et de χ :

$$\langle \theta, \chi \rangle = \sum_{n=1}^p \sigma^n(\theta) \chi(\sigma^{-n}) ,$$

et on note \tilde{k} la sous-extension de $N(\zeta)$ engendrée par les $\langle \theta, \chi \rangle^p$.

On peut alors définir une application f de K dans \tilde{k} de la façon suivante : choisissons un élément θ_0 de K qui forme avec ses conjugués une base normale de l'extension N/k et un caractère χ de H , différent du caractère trivial ; on pose alors :

$$f(\theta) = \frac{\langle \theta, \chi \rangle}{\langle \theta_0, \chi \rangle} ;$$

on démontre alors [1] le théorème suivant.

THEOREME 1. - L'application f induit un isomorphisme de A_0 -modules entre A_K/\mathbb{Z} et $f(A_K)$ qui est un A_0 -module libre.

Soit \mathcal{B} un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$. En utilisant des résultats de Rosen [2] et une suite exacte analogue à la suite de Mayer-Vietoris [3], Galovitch [4] a démontré que le théorème 1 avait pour conséquence.

THEOREME 2. - Si N/\mathbb{Q} est une extension modérément ramifiée, $A_N \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{B}$ est un \mathcal{B} -module libre.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - J. COUGNARD, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 274, (1972), pp.936-939.
- [2] - M.I. ROSEN, Representations of twisted Group Rings, Thèse, Princeton (1963).
- [3] - I. REINER, S. ULLOM, A. MAYER-VIETORIS, Sequence for class-groups, J. Algebra (à paraître).
- [4] - S. GALOVICH, N.I.B.S. and P.I.C.S., Thèse, Brown University (1972).

-:-:-

Université de Bordeaux I
 U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
 351, cours de la Libération
 33405 - TALENCE