

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DRESS

**Sur le problème de Waring à exposant réel
(résultats de Dress et Polzin)**

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 55-58

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__55_0

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE PROBLEME DE WARING
A EXPOSANT REEL
(résultats de Dress et Polzin)

par

François DRESS

-:-:-

1. GENERALITES SUR LE PROBLEME DE WARING.

Etant donné un nombre réel $c > 1$, on cherche à représenter tout entier $m \geq 0$ comme somme

$$m = \sum_{i=1}^r [a_i^c],$$

les a_i étant des entiers positifs ou nuls ($[]$ est la notation de la partie entière). S'il existe un entier r tel que tout entier $m \geq 0$ s'écrive sous la forme précédente, on note alors :

- $g(c)$ le plus petit r tel que tout entier m soit somme de r termes $[a_i^c]$;
- $G(c)$ le plus petit r tel que tout entier m "suffisamment grand" (i.e. $m \geq M_r(c)$) soit somme de r termes $[a_i^c]$.

On a évidemment $2 \leq G(c) \leq g(c)$.

Pour c entier, on retrouve le problème de Waring classique (sur ce sujet, consulter par exemple Ellison [4]).

Pour c réel quelconque, Segal a montré ([6], 1934) l'existence de G et de g (existences qui sont bien sûr liées) et donné pour $G(c)$ une majoration, de l'ordre de c^{2c} . Cette majoration vaut 18 au voisinage de 1, mais on peut déduire presque immédiatement d'un article antérieur ([5], 1933) le résultat $G(c) = 2$ ou 3 valable pour $1 < c < 3/2$.

Il ne semble pas qu'il y ait eu de majorations meilleures jusqu'au travail de Deshouillers ([1], 1972) qui utilise des estimations de sommes trigonométriques et obtient $G(c) = 2$ pour $1 < c < 4/3$ (il donne par ailleurs une majoration explicite équivalente à $4c \log c$ pour $c > 12$).

Signalons à ce propos la conjecture très raisonnable : $G(c) = [c] + 1$ pour tout c non entier (on sait que ce résultat est impossible pour c entier pour des raisons de congruences).

Pour ce qui est de $g(c)$, comme les résultats de Deshouillers fournissent une valeur explicitement calculable pour la borne $M_2(c)$ au-delà de laquelle tout entier est somme de 2 termes $[a_i^c]$, sa détermination complète entre 1 et $4/3$ est réduite à des calculs finis, quoiqu'impraticables en fait. Tout au plus sait-on qu'il existe un intervalle $1 < c < 1 + \epsilon$ où $g(c) = 2$. Enfin, pour les valeurs de c petites, mais au-delà de $4/3$, il n'existe aucune "bonne" majoration de $g(c)$.

2. ESTIMATIONS DE G ET DE g POUR $1 < c < 3/2$.

Le principe de notre étude est le suivant : montrer que tout entier $m (\geq M_3(c))$ est assez proche d'une somme $a_1^c + a_2^c$ pour que, après passage aux parties entières, il suffise d'un troisième terme pour obtenir l'égalité

$$m = [a_1^c] + [a_2^c] + r, \text{ avec } r = 0 = [0^c], \quad 1 = [1^c] \text{ ou } 2 = [2^c].$$

Les valeurs a_1 et a_2 ne sont pas quelconques : si m est compris entre $2n^c$ et $2(n+1)^c$, on prend $a_1 = n+h$, $a_2 = n-h$, avec h "petit" devant n .

On utilise alors des développements en séries avec des majorations effectives des restes, ce qui redonne le théorème de Segal :

$$\text{pour } c \in]1, 3/2[, \quad G(c) \leq 3, \quad \text{i.e. } G(c) = 2 \text{ ou } 3.$$

De ces premiers calculs, on déduit trois inégalités dépendant de deux paramètres, et la recherche approchée d'un point triple (effectuée sur ordinateur) permet ensuite d'obtenir une valeur simple de la borne $M_3(c)$ au-delà de laquelle tout entier est somme de 3 termes $[a_i^c]$. On montre enfin (soit en utilisant la théorie additive de Schnirelman - théorèmes de Mann et Dyson -, soit par une étude directe) que tout entier de 1 à $M_3(c) - 1$ est également somme de 3 termes $[a_i^c]$, soit :

$$\text{pour } c \in]1, 1.445[, \quad g(c) \leq 3, \quad \text{i.e. } g(c) = 2 \text{ ou } 3.$$

(La valeur 1.445 n'a pas été dépassée pour des raisons de gigantisme des calculs, mais nous conjecturons allègrement que toute valeur de c inférieure à

3/2 pourrait être atteinte).

Dans une deuxième partie de notre étude nous recherchons, pour une suite convenable d'intervalles en c de la forme $[\text{Log } m_j / \text{Log } a_j, \text{Log } m_{j+1} / \text{Log } a_{j+1}]$, le plus petit entier (s'il existe) qui n'est pas somme de 2 termes $[a_1^c]$. Les calculs ont été bien sûr effectués sur ordinateur, avec une limite heuristique au-delà de laquelle cette recherche est abandonnée.

Nous avons ainsi trouvé 42 intervalles où $g(c) \geq 3$, le premier étant $[\text{Log } 77 / \text{Log } 29 = 1.28999, \text{Log } 84 / \text{Log } 31 = 1.29028[$ et le dernier $[\text{Log } 39 / \text{Log } 14 = 1.38820, +\infty[$. En conjuguant ces résultats avec la majoration précédemment établie, cela donne donc 42 intervalles (le dernier étant "coupé" à 1.445) où $g(c) = 3$ exactement.

La répartition de ces intervalles est très irrégulière : le tableau ci-contre donne, centième par centième, la somme S des longueurs des intervalles où nous avons trouvé $g(c) = 3$.

intervalle	S/0.01
au-dessous de 1.28	0.
1.28 - 1.29	0.0002
1.29 - 1.30	0.0656
1.30 - 1.31	0.
1.31 - 1.32	0.1188
1.32 - 1.33	0.0494
1.33 - 1.34	0.0614
1.34 - 1.35	0.7506
1.35 - 1.36	0.5224
1.36 - 1.37	0.3348
1.37 - 1.38	0.5110
1.38 - 1.39	0.8189
au-dessus de 1.39	1.

Une remarque pour terminer : la limite heuristique évoquée plus haut correspond à une probabilité (heuristique) suffisamment faible qu'un entier ne soit pas somme de 2 termes $[a_1^c]$ pour qu'il soit légitime de conjecturer que $g(c) = 2$ sur le complémentaire de la réunion des 42 intervalles déterminés.

Le lecteur trouvera dans [2] le détail de tous les calculs dont nous venons d'exposer les lignes directrices.

3. DISCUSSION DES METHODES ELEMENTAIRES.

On sait qu'historiquement le problème de Waring a été abordé par des méthodes élémentaires avant que les méthodes analytiques (Hardy et Littlewood, 1920, et Vinogradov, 1924) ne les relèvent presque à l'arrière-plan pour de banales raisons d'efficacité.

Presque ... car il s'avère que pour les petites valeurs de c les méthodes élémentaires demeurent "compétitives". On pourrait tout d'abord recopier

notre étude avec $1, 2, \dots$ termes de plus pour obtenir $G(c)$ et $g(c) \leq 4, 5, \dots$ jusqu'à des valeurs de c supérieures à $3/2$; nous craignons que cela ne paraisse bien fastidieux. Mais nous espérons surtout que les méthodes élémentaires permettent bientôt de démontrer, pour $c \in]1, 2[$, sinon le meilleur résultat espéré, i.e. $G(c) = 2$, du moins un résultat très fort du type : il existe L tel que, dans tout intervalle de longueur L , se trouve un entier somme de 2 termes $[a_1^c]$ (d'autant que cette notion nous paraît la meilleure : pour le " \tilde{G} " qui lui correspond, la conjecture évidente est $\tilde{G}(c) = [c] + 1$, y compris pour les valeurs entières de c).

Rappelons enfin que la meilleure majoration actuelle pour $c = 3$: $G(3) \leq 7$, peut être considérée comme très mauvaise, et il nous semble qu'elle puisse être améliorée, soit par les méthodes élémentaires, soit par un heureux mariage des méthodes élémentaires et analytiques.

--:--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.M. DESHOUILLERS - Propriétés additives et arithmétiques des suites à croissance polynomiale (Thèse Sc. Math., Paris, 1972).
- [2] F. DRESS et M. POLZIN - Problème de Waring à exposant réel compris entre 1 et $3/2$: estimations de G et de g . Publ. Math. Univ. Bordeaux I, 1972-73, fasc. 4, p. 1-23.
- [3] F. DRESS et M. POLZIN - Sur le problème de Waring pour un exposant réel c inférieur à $3/2$. A paraître in C.R. Acad. Sci., 1973.
- [4] W. ELLISON - Waring's problem. Amer. Math. Monthly, 78, 1971, p.10-36.
- [5] B. SEGAL - A general theorem concerning some properties of an arithmetical function [en russe, résumé en anglais]. Acad. Sci. URSS, N.S., 3, 1933, p. 95-98.
- [6] B. SEGAL - Der Waringsche Satz für die Potenzen mit gebrochenen und mit irrationalen Exponenten. Trav. Inst. Steklov, 5, 1934, p. 73-86.

--:--:--

François DRESS
 Université de Bordeaux I,
 U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,
 351, cours de la Libération
 33405 - TALENCE