

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES DUPAIN

Répartition des sous-suites d'une suite donnée

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 59-62

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__59_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPARTITION DES SOUS-SUITES D'UNE SUITE DONNÉE

par

Y. DUPAIN

-:-:-:-

I. RAPPELS ET DEFINITIONS.

Soient X un ensemble et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X .
 Soit E un sous-ensemble de X . Nous définissons $\pi(E, N) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}; n < N; u_n \in E\}$.

Si X est le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} , nous dirons que la suite $u = (u_n)$ est équirépartie si, pour tout intervalle I , l'expression $\frac{\pi(I, N)}{N}$ admet, pour N tendant vers l'infini, la limite $\mu(I)$ (μ étant la mesure de Haar).

D'une façon plus générale, si X est un espace topologique et si μ est une mesure borélienne positive de masse 1, la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera μ -équirépartie, si, pour tout sous-ensemble E de X μ -mesurable au sens de Riemann (i.e. $\mu(\text{Fr}(E)) = 0$), l'expression $\frac{\pi(E, N)}{N}$ admet la limite $\mu(E)$ pour N tendant vers l'infini.

II. BUT DE L'EXPOSE.

Nous allons nous intéresser aux sous-suites d'une suite donnée. Considérons le tore muni de la mesure de Lebesgue et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite donnée, dense; et recherchons les sous-suites de u possédant une densité et équiréparties. J. Lesca remarque que l'ensemble des densités de telles suites est un intervalle $[0, \alpha]$. M. Mendès-France [2] demande si cet intervalle est fermé.

La réponse est positive. Avant de résoudre ce problème, nous allons le transformer et le généraliser.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de u de densité $\alpha > 0$ équirépartie; alors, pour tout intervalle I , $\frac{\text{card}\{k, k < K, u_{n_k} \in I\}}{K} \rightarrow \mu(I)$ pour $K \rightarrow \infty$. Soit P le sous-ensemble de \mathbb{N} défini par $P = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$; nous remarquons alors que

$\frac{\text{card}\{n, n \in P, n < N, u_n \in I\}}{N} \rightarrow \alpha_\mu(I)$, ce qui nous amène, d'une manière plus générale, à définir dans un espace topologique, la ν -répartition d'un sous-ensemble de \mathbb{N} .

Soient X un espace topologique, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et ν une mesure borélienne positive définie sur X . Nous dirons qu'une partie P de \mathbb{N} est ν -répartie, si, pour tout sous-ensemble E de X ν -mesurable au sens de Riemann, l'expression $\frac{\text{card}\{n, n \in P, n < N, u_n \in E\}}{N}$ admet, pour N tendant vers l'infini, la limite $\nu(E)$. On peut remarquer que si P est ν -répartie, P admet la densité $\nu(X)$, donc que ν est de masse totale inférieure ou égale à 1. De plus, si $\nu(X) > 0$ la suite $(u_n)_{n \in P}$ est μ -équirépartie pour la mesure $\mu = \frac{1}{\nu(X)} \nu$.

La recherche des sous-suites de u possédant une densité > 0 et équiréparties se réduit à la recherche des mesures ν pour lesquelles il existe des parties P de \mathbb{N} ν -réparties.

Nous poserons donc le problème dans les conditions suivantes :

Soit X un espace topologique localement compact muni d'une base dénombrable.

Soit \mathfrak{M} l'ensemble des mesures boréliennes positives sur X .

Soit \mathcal{Q} l'ensemble des mesures ν de \mathfrak{M} pour lesquelles il existe une partie P de \mathbb{N} ν -répartie.

Il s'agit de caractériser \mathcal{Q} .

Théorème. L'ensemble \mathcal{Q} des mesures $\mu \in \mathfrak{M}$ telles qu'il existe une partie P de \mathbb{N} μ -répartie est un intervalle initial fermé de \mathfrak{M} .

On prouve l'existence d'une mesure $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ telle que \mathcal{Q} est l'ensemble des mesures majorées par μ_0 . La mesure μ_0 est construite explicitement. [1]

Remarques :

1) Ce théorème est bien une réponse au problème initial. En effet, s'il existe des sous-suites de densité à équiréparties, pour tout $a' < a$, il existe des parties $P_{a'}$ de \mathbb{N} a' - μ -réparties (μ étant la mesure de Haar), donc $a'\mu \leq \mu_0$ pour tout $a' < a$; donc $a\mu \leq \mu_0$; autrement dit, il existe une partie P_a de \mathbb{N} $a\mu$ -répartie, et la sous-suite $(u_n)_{n \in P_a}$ est équirépartie de densité a .

2) Si X est réduit à deux éléments $X = \{a, b\}$, à une suite n de points de X faisons correspondre la partie $Q = \{n: u_n = a\}$. Alors u est équirépartie si Q a une densité. Si Q n'a pas de densité, il existe un nombre d_0 qui est la plus grande densité des sous-suites de Q . Il convient de remarquer que d_0 n'est pas en général la densité inférieure d^- de Q mais un minorant de d^- , et que si l'on se donne trois nombres d^0 , d^- et d^+ tels que $0 \leq d_0 \leq d^- < d^+ \leq 1$, il existe des parties Q pour lesquelles ces nombres sont respectivement la meilleure densité, la densité inférieure et la densité supérieure.

3) Si X n'est pas réduit à un élément, pour toute mesure μ appartenant à \mathfrak{M} de norme au plus 1 il existe une suite u telle que l'ensemble \mathcal{G} soit l'ensemble des mesures majorées par μ .

4) Si P est une partie de \mathbb{N} μ -répartie et ν -répartie, μ et ν étant des mesures de \mathfrak{M} , alors $\mu = \nu$. Soient u une suite μ -équirépartie et B_0 un borélien de X ; soit ν la mesure définie par $\nu(B) = \mu(B \cap B_0)$. Alors deux parties P et Q ν -réparties ont une différence symétrique de densité nulle. (Ce résultat est à rapprocher de ceux de R. Scoville [3]).

5) Il ressort du théorème que si μ est une mesure de norme 1, l'ensemble des densités des sous-suites μ -équiréparties, s'il n'est pas vide, est un intervalle réel $[0, \lambda_0]$. Si $X = [0, 1[$, $\mu =$ la mesure de Lebesgue, et si u possède une fonction de répartition f , on calcule $\lambda_0(u) = \lambda_0 = \text{Inf}\{f'(x) : x \in [0, 1[, f \text{ dérivable au point } x\}$.

Ce résultat s'applique, par exemple, à la suite des puissances d'un nombre de Salem θ ; en particulier si k est le degré de θ , on montre que λ_0 ne dépend que de k et que λ_0 tend vers 1 quand k tend vers l'infini.

--:--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. DUPAIN et J. LESCA. - Répartition des sous-suites d'une suite donnée. Acta Arithmetica XXIII (1973) pp. 307-314.
- [2] M. MENDES FRANCE - Suites et sous-suites équiréparties modulo 1. Journées arithmétiques françaises, Université de Provence (1971).

- [3] R. SCOVILLE - Some Measure Algebras on the integers. Pacific J. Math.,
34, n° 3 (1970), pp. 769-779.

-:-:-:-

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Infor-
matique
351, cours de la Libération
33405 TALENCE