GEORGES GRAS

Problèmes relatifs aux l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 91-100
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__91_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 91-100

PROBLEMES RELATIFS AUX ℓ-CLASSES D'IDEAUX DANS LES EXTENSIONS CYCLIQUES RELATIVES DE DEGRE PREMIER ℓ

par

Georges GRAS

-:-:-:-

I. Introduction.

Etant donné une extension de corps de nombres K/k à groupe de Galois H cyclique d'ordre premier ℓ, on peut se poser la question : que signifie l'expression "étude du ℓ-groupe des classes d'idéaux $\mathcal{H}(K)$ ", d'une telle extension ?

Cela peut vouloir dire :

i) donner des contraintes sur les H-modules qui réalisent le ℓ-groupe des classes de K ;

ii) trouver des algorithmes de calcul du nombre de ℓ-classes d'une extension K/k ;

iii) donner des expressions du ℓ-rang ou simplement des majorations ;

iv) caractériser l'existence de ℓ-classes non invariantes par H , etc...

On se propose de décrire ici une méthode d'attaque susceptible d'englober une grande partie de ces différents aspects : certains d'entre eux ont déjà été étudiés mais en général par des méthodes sans lien commun les unes avec les autres (consulter la bibliographie donnée dans [4]). Nous retrouverons aussi des études générales dues principalement à Inaba [8] et Fröhlich [2] .

Donnons d'abord les six résultats suivants comme "échantillonnage" (pour une idée plus complète des applications possibles, se reporter à [4] et [5]) :

<u>Résultat 1</u>. (Hasse [6], Kaplan [9]). Soit $p \equiv 1 \bmod 8$ (alors $p = 2x^2-y^2$, $x,y \in \mathbb{Z}$). Si $|x| \equiv 1 (4)$ alors 8 divise le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ (cf. [4] chap.V, [7] et [9] pour d'autres résultats analogues).

<u>Résultat 2</u>. (Damey et Payan [1]). Les 4-rangs des groupes des classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ diffèrent d'une unité au plus (le plus grand rang étant pour

le corps imaginaire).

Résultat 3. ([4]). Les 2^{t-1} corps cubiques dont le conducteur $p_1 p_2 \dots p_t$ est produit de t nombres premiers donnés (en convenant que $p_t = 9$ si 3 est ramifié) ont un 3-rang égal à $2(t-1)$ si et seulement si p_i est reste cubique modulo p_j pour tout i,j , $i \neq j$ (cf [4] chap.VI pour des résultats plus précis concernant les corps cubiques).

Résultat 4. ([4]). Parmi les deux corps cubiques de conducteur $p_1 p_2$, si l'un a une classe d'ordre 9, il en est de même pour l'autre.

Résultat 5. ([5] et [10]). Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension à groupe de Galois diédral d'ordre 6 et soit L l'un des corps cubiques non galoisien contenus dans K ; faisons les hypothèses :

(i) les t nombres premiers totalement ramifiés dans $L/\mathbb{Q}$ ne sont pas décomposés dans le sous-corps quadratique k de K ;

(ii) 3 ne divise pas le nombre de classes de k ;

alors le 3-rang du groupe des classes de L est égal à $t-1-a$ et celui de K à $2(t-1-a)$, 3^a étant l'indice, dans le groupe des unités de k , du sous-groupe de celles qui sont normes d'un élément de K (ce résultat, (cf. [5]), est la généralisation d'un résultat de Kobayashi [10] ; depuis, Kobayashi a étendu ce type de résultat à d'autres sortes d'extensions de degré ℓ non cycliques ([11])).

Résultat 6. Soient K et $\hat{K}$ les 2 corps cubiques cycliques de conducteur $37 \cdot 991$; alors $\mathcal{H}(K)$ et $\mathcal{H}(\hat{K})$ sont respectivement isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$.

Nous allons voir comment on peut rendre un peu plus systématique la démonstration de ces divers types de résultats.

II. Etude générale.

Soient K/k une extension cyclique de degré premier ℓ , à groupe de Galois H , A_K et A_k les anneaux d'entiers de K et k , $\mathcal{J}(K)$ et $\mathcal{J}(k)$ (resp. $\mathcal{J}_o(K)$ et $\mathcal{J}_o(k)$) les groupes d'idéaux fractionnaires (resp. principaux au sens restreint) de K et k , E_K et E_k les groupes des unités et enfin $\mathcal{H}(K)$ et $\mathcal{H}(k)$ les ℓ-groupes des classes au sens restreint de K et k . On considère la filtration suivante : $\mathcal{H}_i = \mathrm{Ker}(\sigma-1)^i$ où σ est un générateur de H ; (cf. travaux antérieurs de Inaba, Fröhlich, Leopoldt..., où l'on étudiait aussi cette filtration ou encore la filtration des $\mathcal{H}(K)^{(\sigma-1)^i}$ qui est "duale" de la précédente).

Le premier "stade", $\mathcal{H}_1$, est bien connu grâce à la théorie des genres et à la formule de Chevalley que l'on peut transformer dans le cas restreint ([4]) :

$$|\mathcal{H}_1| = \frac{|\mathcal{H}(k)|\,\ell^{t-1}}{(E_k^+ : E_k^+ \cap NK^*)}$$

où t est le nombre d'idéaux premiers ramifiés dans K/k et E_k^+ le sous-groupe de E_k formé par les unités totalement positives dans k.

Il est donc naturel d'étudier les quotients $\mathcal{H}_{i+1}/\mathcal{H}_i$ puisque pour $i = 0$ on a une "formule". La connaissance des ordres $|\mathcal{H}_{i+1}/\mathcal{H}_i|$ et de celle de l'action de la norme $\nu = 1+\sigma+\ldots+\sigma^{\ell-1}$ entraîne la connaissance de la structure de $\mathcal{H}(K)$. Par exemple, si $\mathcal{H}(K)^{\nu} = \{1\}$, le ℓ^q-rang R_q de $\mathcal{H}(K)$ est
$$R_q = \sum_{i=(q-1)(\ell-1)}^{q(\ell-1)-1} \dim_{\mathbb{F}_\ell}(\mathcal{H}_{i+1}/\mathcal{H}_i) \quad \text{(cf. [4] et [12]).}$$

Il suffit alors d'avoir un moyen pour déterminer :

(i) $\mathcal{H}_{i+1}$ à partir de $\mathcal{H}_i$ par un groupe d'idéaux convenable noté $\mathcal{I}_{i+1}$ ($\mathcal{H}_i$ étant défini par $\mathcal{I}_i$),

(ii) $|\mathcal{H}_{i+1}/\mathcal{H}_i|$ de façon directe à partir de $\mathcal{H}_i$ par une formule du style de celle de Chevalley.

1) Premier problème : détermination de $\mathcal{H}_{i+1}$. On a le théorème suivant qui en donne une solution :

Théorème 1. Soit $\mathcal{H}$ un sous-H-module de $\mathcal{H}(K)$ et soit $\tilde{\mathcal{H}} = \{h \in \mathcal{H}(K), h^{\sigma-1} \in \mathcal{H}\}$. Pour tout sous-H-module $\mathcal{I}$ de $\mathcal{I}(K)$ dont l'image dans $\mathcal{H}(K)$ est $\mathcal{H}$ et qui est tel que

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{I}(K)^{\sigma-1} = \mathcal{I}^{\sigma-1},$$

on a la suite exacte :

$$1 \to N\mathcal{I}_0/I^{\ell} \to N\mathcal{I} \cap N\mathcal{I}_0(K)/I^{\ell} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \tilde{\mathcal{H}}/\mathcal{H}\mathcal{H}_1 \to 1,$$

où $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0(K)$ et $I = N\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0(k)$.

L'homomorphisme $\bar{\varphi}$ permet de construire $\tilde{\mathcal{H}}$ à partir de $\mathcal{H}$ (si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i$,

$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{i+1}$) : Etant donné $a \in N\mathcal{I} \cap N\mathcal{I}_o(K)$, on peut écrire, d'une part, $a = N\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}$, et, d'autre part, $a = N(\alpha A_K)$, $\alpha \in K^*$; $\frac{\mathfrak{A}}{(\alpha)}$ est de norme (1) donc $\mathfrak{A} = (\alpha A_K \mathfrak{B}^{\sigma-1})$, avec $\mathfrak{B} \in \mathcal{I}(K)$; par définition $\varphi(a)$ est l'image dans $\tilde{\mathcal{H}}/\mathcal{H}\mathcal{H}_1$ de la classe de $\mathfrak{B}$.

Ce théorème ne donne pas $|\tilde{\mathcal{H}}/\mathcal{H}|$ directement.

2) <u>Deuxième problème</u> : <u>Calcul de</u> $|\mathcal{H}_{i+1}/\mathcal{H}_i|$. Soit $\mathcal{I}_i$ un groupe d'idéaux représentant $\mathcal{H}_i$. On considère la suite exacte :

$$1 \to E_k^+ \to k^{*+} \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}_o(k) \to 1 ,$$

et on pose $\Lambda_i = \psi^{-1}(I_i)$ $(I_i = N\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_o(k))$.

<u>Proposition</u>. <u>On a</u> $|\mathcal{H}_{i+1}/\mathcal{H}_i| = \frac{|\mathcal{H}(k)|}{|N\mathcal{H}_i|} \; \frac{\ell^{t-1}}{(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^*)}$.

Cette formule se déduit de la suite exacte du théorème 1 ; elle réalise une généralisation de la formule de Chevalley (pour $\mathcal{H}_o = (1)$ on a $\Lambda_o = E_k^+$ et on retrouve cette dernière).

Reste à trouver un moyen systématique pour déterminer $(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^+)$. Le problème n'est pas très difficile car il se traite localement (par le théorème des normes de Hasse).

On procède par adjonction des racines ℓ^e de l'unité.

<u>Application de la théorie de Kummer</u>. On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dash, "d"] \arrow[d, dash, "\ell"'] & K' \arrow[d, dash, "\ell"] \\ k \arrow[r, dash] & k' \end{tikzcd}$$

Soient $K' = K\mathbb{Q}^{(\ell)}$ et $k' = k\mathbb{Q}^{(\ell)}$; il existe $\alpha \in k'$ tel que $K' = k'(\sqrt[\ell]{\alpha})$.

La ramification dans K'/k' se déduit de celle de K/k et inversement, de façon triviale. De plus un nombre $a \in k$ est norme dans K/k si et seulement s'il est norme dans K'/k' , ce qui fait que l'indice $(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^*)$ peut se calculer à l'aide du symbole de Hilbert dans k' : on aura $a \in NK^*$ si et seulement si $(\alpha, a)_{\mathfrak{p}} = 1$ pour toute place $\mathfrak{p}$ dans k' . Or, par suite du fait que $a \in k$ et que K'/k est abélienne, le symbole $(\alpha, a)_{\mathfrak{p}}$ ne dépend que de la place $\mathfrak{P}$ de k au-dessous de $\mathfrak{p}$ ([4]) . On peut alors énoncer :

<u>Théorème 2</u>. <u>Soit</u> $q(a_1),\dots,q(a_n)$ <u>une base de</u> Λ_i/Λ_i^ℓ $(a_k \in \Lambda_i)$; <u>alors</u> $|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i| = \dfrac{|\mathfrak{H}(k)|}{|N\mathfrak{H}_i|}\,\ell^{t-1-r}$, <u>où</u> r <u>est le rang du système linéaire</u> $\prod_{k=1}^{n} (\alpha, a_k)_{\mathfrak{P}_j}^{x_k} = 1$, <u>les</u> $\mathfrak{P}_j$ <u>étant les idéaux premiers ramifiés</u>. <u>En outre</u>, <u>on a</u> $r \le t-1$ (<u>si</u> $t \ge 1$) <u>et</u> $r = 0$ <u>si</u> $t = 0$.

Remarquons que :

(i) on se limite aux $\mathfrak{P}_j$ ramifiés car les éléments de Λ_i sont déjà des normes d'idéaux, il n'y a donc pas de conditions locales pour les places inertes ou décomposées ;

(ii) le fait que $r \le t-1$ ($r = 0$ si $t = 0$) provient de la formule du produit : $\prod_{\mathfrak{p}} (\alpha, a)_{\mathfrak{p}} = 1$, qui donne ici $\prod_{\mathfrak{P}} (\alpha, a)_{\mathfrak{P}}^{n_{\mathfrak{P}}} = 1$, où $n_{\mathfrak{P}}$ est le nombre de places $\mathfrak{p}$ divisant $\mathfrak{P}$ dans K/k ; d'où une relation non triviale, car les $n_{\mathfrak{P}}$ sont premiers à ℓ .

III. <u>Conséquences</u>.

A partir de ce qui précède, on peut déduire des résultats de deux sortes :

(i) Calculs numériques de nombres de ℓ-classes. (Résultat 6 par exemple, tables numériques de [4]),

(ii) Des énoncés généraux du style de ceux mentionnés au début (Résultats 1 à 5).

1) <u>Algorithmes numériques</u>. En pratique, on utilise l'algorithme général figuré par le schéma ci-dessous (et qui peut être utile aussi dans un cas "non numérique") :

Recherche de $\mathscr{I}_1$
(on suppose connus $\mathfrak{H}(k)$ et E_k^+) si $\mathfrak{A} \in \mathscr{I}_1$, $\mathfrak{A}^{\sigma-1} = \alpha A_K$, avec $N\alpha \in E_k^+$ on est donc ramené à chercher les unités qui sont normes et à trouver effectivement un $\alpha \in K^*$ puis à adjoindre des idéaux $\mathfrak{a}$ de k étendus à K représentant le groupe $\mathfrak{H}(k)$. D'où $\mathscr{I}_1$, Λ_1 et $N\mathfrak{H}_1$. De plus, si $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda_1 = \langle p_1, \dots, p_t \rangle$.

$\mathscr{I}_1, \Lambda_1, N\mathfrak{H}_1$,
$|\mathfrak{H}_1| = \dfrac{|\mathfrak{H}(k)|\,\ell^{t-1}}{(E_k^+ : E_k^+ \cap NK^*)}$
i: = 1

Calcul de $(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^*)$
détermination d'une famille d'éléments $a \in \Lambda_i \cap NK^*$ permettent d'engendrer $\Lambda_i \cap NK^* / \Lambda_i^{\ell}$

$a \in \Lambda_i \cap NK^*$
$|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i| = \dfrac{|\mathfrak{H}(k)|\,\ell^{t-1}}{|N\mathfrak{H}_i|\,(\Lambda_i : \Lambda_i \cap NK^*)}$

fin si $|\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i| = 1$

A partir des $a \in \Lambda_i \cap NK^*$ on résoud effectivement les équations $a = N\alpha$, $\alpha \in K^*$, on écrit $\mathfrak{A} = \alpha A_K \mathfrak{B}^{\sigma-1}$ d'où $\mathscr{I}_{i+1} = \langle \mathscr{I}_i, \mathfrak{B}, \dots \rangle$

A partir de $\mathscr{I}_{i+1}$ on déduit $N\mathscr{I}_{i+1}$ qui conduit à $N\mathfrak{H}_{i+1}$ dans $\mathfrak{H}(k)$ et à I_{i+1} donc à Λ_{i+1}

i: = i+1

Remarque : Il ne faut pas oublier de vérifier la condition $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}(K)^{\sigma-1} = \mathcal{J}_i^{\sigma-1}$; cette contrainte n'est pas trop grande en pratique : il suffit de résoudre les équations $N\alpha = a$ de telle manière que $\mathfrak{B}$ soit par exemple premier (infinité de solutions).

Exemple : On considère l'extension cubique cyclique de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{182})$. On vérifie facilement que 3 est ramifié dans K/k, que 2 est inerte dans $k/\mathbb{Q}$, que 7 et 13 sont décomposés dans $k/\mathbb{Q}$ et que si ζ_3 est une racine cubique de l'unité, primitive, alors $\zeta_3 \in k$ et n'est pas norme dans K/k. On note τ l'élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ prolongé à K.
On notera $\mathfrak{p}_2 = 2A_k$, $\mathfrak{p}_3 = \sqrt{-3}A_k$, $\mathfrak{p}_7 = (2+\sqrt{-3})A_k$, $\mathfrak{p}_7^\tau = (2-\sqrt{-3})A_k$, $\mathfrak{p}_{13} = (1+2\sqrt{-3})A_k$ et $\mathfrak{p}_{13}^\tau = (1-2\sqrt{-3})A_k$ les idéaux premiers de k ramifiés dans K/k.

D'après la formule de Chevalley, on a $|\mathcal{H}_1| = \dfrac{3^{t-1}}{(E_k : E_k \cap NK^*)} = 3^4$ et, d'après [4], toute classe invariante est, ici, classe d'un idéal invariant ; par conséquent, il existe deux relations indépendantes non triviales entre les classes des six idéaux premiers de K : $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_7$, $\mathfrak{P}_7^\tau$, $\mathfrak{P}_{13}$ et $\mathfrak{P}_{13}^\tau$ ramifiés dans K/k et qui engendrent par définition le groupe $\mathcal{J}_1$.

Nous allons rechercher ces relations (ceci n'est nullement nécessaire pour déterminer $\Lambda_1 \cap NK^*$ et $\mathcal{J}_2$; c'est seulement un renseignement supplémentaire) :

La première est donnée par $\sqrt[3]{2.7.13}\,A_K = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_7^{1+\tau}\mathfrak{P}_{13}^{1+\tau}$; la seconde s'obtient à partir d'une unité du corps (via le théorème 90 de Hilbert) : on trouve que $\eta = -17 + 3\sqrt[3]{182}$ est une unité de K de norme relative 1. On a donc $\eta = \varphi^{\sigma-1}$ avec, par exemple, $\varphi = 1 + \eta + \eta\eta^\sigma$; on vérifie facilement que $\frac{\varphi}{3}$ est encore un entier et que sa norme relative est

$$N_{K/k}(\tfrac{\varphi}{3}) = -\,7.13(8+3\sqrt{-3}) = -\,7.13(2-\sqrt{-3})(1+2\sqrt{-3}) \ ;$$

il en résulte que $\frac{\varphi}{3}A_K = \mathfrak{P}_7^{1+2\tau}\mathfrak{P}_{13}^{2+\tau}$. On en déduit qu'une $\mathbb{F}_3$-base de $\mathcal{H}_1$ serait

$$cl_K(\mathfrak{P}_2)\ ,\ cl_K(\mathfrak{P}_3)\ ,\ cl_K(\mathfrak{P}_7)\ \text{ et }\ cl_K(\mathfrak{P}_7^\tau)\ .$$

Le groupe Λ_1 associé à $\mathcal{J}_1$ est donc $\Lambda_1 = \langle \zeta_3, 2, 3, \alpha, \alpha^\tau, \beta, \beta^\tau \rangle$ avec $\alpha = 2+\sqrt{-3}$, $\alpha^\tau = 2-\sqrt{-3}$, $\beta = 1+2\sqrt{-3}$, $\beta^\tau = 1-2\sqrt{-3}$; le calcul des symboles de Hilbert $(182, u)_\mathfrak{p}$, $u \in \Lambda_1$, $\mathfrak{p}$ idéal premier de k ramifié dans K/k, conduit à la matrice suivante (en notation additive) à coefficients dans $\mathbb{F}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

chaque ligne étant formée des symboles $(182,\zeta_3)_{\mathfrak{p}}$, $(182,2)_{\mathfrak{p}}$, $(182,3)_{\mathfrak{p}}$, $(182,\alpha)_{\mathfrak{p}}$, $(182,\alpha^{\tau})_{\mathfrak{p}}$, $(182,\beta)_{\mathfrak{p}}$ et $(182,\beta^{\tau})_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble $\{\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_7,\mathfrak{p}_7^{\tau},\mathfrak{p}_{13},\mathfrak{p}_{13}^{\tau}\}$. Le rang de cette matrice est 4 ; les trois solutions indépendantes du système sont, par exemple :

$$2\alpha^{1+\tau}\beta^{1+\tau} = 182 \in NK^* ,$$

$$\alpha^{1+2\tau}\beta^{2+\tau} = 7.13(8+3\sqrt{-3}) \in NK^* ,$$

$$\beta^{1+\tau} = 13 \in NK^* ;$$

les deux premières provenant des relations entre les "classes ambiges" trouvées plus haut.

On aura donc (théorème 2) : $|\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1| = 3$ soit $|\mathfrak{H}_2| = 3^5$; c'est-à-dire que le 3-rang de $\mathfrak{H}(K)$ est égal à 5 .

Déterminons alors $\mathfrak{H}_2$. Pour trouver un H-module $\mathcal{J}_2$ associé à $\mathfrak{H}_2$, il suffit de résoudre l'équation $N_{K/k}(\varkappa) = 13$, $\varkappa \in K^*$ (les deux autres relations indépendantes trouvées devraient être considérées si l'on ne savait déjà qu'elles proviennent de la principalité d'idéaux : autrement dit, chaque fois que l'on a une égalité de la forme $\mathfrak{A} = (\alpha)$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{J}_1$ par exemple, la relation associée $\mathfrak{A} = \alpha A_K \mathfrak{B}^{\sigma-1}$ conduit ici à $\mathfrak{B} = A_K$) .

Pour $N_{K/k}\varkappa = 13$, on trouve $\varkappa = 5.13 + 9\sqrt[3]{182} + 5(\sqrt[3]{182})^2$ qui a pour polynôme irréductible :

$$X^3 - 3.5.13X^2 - 3.5.13.61X - 13.61^3 ;$$

on en déduit que $\varkappa A_K = \mathfrak{P}_{13}^{1+\tau}\mathfrak{P}_{61}^{(1+2\sigma)(1+\tau)}$, où $\mathfrak{P}_{61}$ est un idéal premier au-dessus de 61 (61 est totalement décomposé dans $K/\mathbb{Q}$) . Comme $\frac{\varkappa}{61}$ est de norme 13 , on écrit $\frac{\varkappa}{61}A_K = \mathfrak{P}_{13}^{1+\sigma}\mathfrak{B}^{\sigma-1}$, soit, ici $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_{61}^{\sigma+\tau+\sigma\tau}$; d'où $\mathcal{J}_2 = \langle \mathfrak{P}_2,\mathfrak{P}_3,\mathfrak{P}_7,\mathfrak{P}_7^{\tau},\mathfrak{P}_{13},\mathfrak{P}_{13}^{\tau},\mathfrak{P}_{61}^{\sigma+\tau+\sigma\tau},\ldots\rangle$ et $\Lambda_2 = \langle \zeta_3,2,3,\alpha,\alpha^{\tau},\beta,\beta^{\tau},61\frac{1+9\sqrt{-3}}{2}\rangle$.

Enfin, le calcul des symboles $(182,61\frac{1+9\sqrt{-3}}{2})_{\mathfrak{p}}$ montre que la matrice associée à Λ_2 se déduit de la précédente en rajoutant la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ce qui fait que le rang de cette nouvelle matrice est 5 , donc que $|\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_2| = 1$ donc que $\mathfrak{H}(K) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$.

2) <u>Résultats généraux</u>. Pour les démonstrations des résultats 1 à 5 se reporter à [4] et [5] ; on peut remarquer que ces démonstrations sont basées sur le fait que, lorsque $k = \mathbb{Q}$, le groupe Λ_1 est particulièrement simple : c'est le groupe $\langle p_1, \dots, p_t \rangle$ engendré par les nombres premiers ramifiés. De toute façon, si k est différent de $\mathbb{Q}$, le groupe Λ_1 est canonique et ne dépend que de la ramification dans K/k , des unités de k et des classes dans k .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DAMEY et J.J.PAYAN. - Existence et construction des extensions galoisiennes et non abéliennes de degré 8 d'un corps de caractéristique différente de 2. J. reine angew. Math., 244 (1970).

[2] A. FRÖHLICH. - The generalization of a theorem of L. Redei's. Quart. J. of Math. Oxford (2), 5 (1954), 130-140.

[3] A. FRÖHLICH. - The genus field and genus group in finite number fields. Mathematika, 6 (1959), 40-46 et 142-146.

[4] G. GRAS. - Sur les ℓ-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ . Thèse, Grenoble (1972), à paraître aux Ann. Inst. Fourier (1973), (t.23, fasc.3 et 4).

[5] G. GRAS. - Sur les ℓ-classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de $\mathbb{Q}$ de degré premier impair ℓ à clôture galoisienne diédrale de degré 2ℓ . A paraître.

[6] H. HASSE. - Über die Klassenzahl des Körpers $P(\sqrt{-p})$ mit einer Primzahl $p \equiv 1 \bmod 2^3$. Aequationes Math., 3 (1969).

[7] H. HASSE. - Über die Teilbarkeit durch 2^3 der Klassenzahl imaginärquadratischer Zahlkörper mit genau zwei verschiedenen Diskriminantenprimteilern. J. reine angew. Math., 241 (1970).

[8] E. INABA. - Über die struktur der ℓ-klassengruppe zyklischer Zahlkörper von Primzahlgrad ℓ . J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. I 4 (1940), 61-115.

[9] P. KAPLAN. - Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratique. J. Math. Soc. of Japan, 25 (1973)

[10] S. KOBAYASHI. - On the 3-rank of the ideal class groups of certain pure cubic fields. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. I A 18 (à paraître).

[11] S. KOBAYASHI. - On the ℓ-class rank in some algebraic number fields (communication personnelle, à paraître).

[12] H.W. LEOPOLDT. - Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. Math. Nachr., 9 (1953), 351, 362.

-:-:-:-

Georges GRAS
Institut de Mathématiques Pures
Laboratoire C.N.R.S. associé n° 188
BP 116

38402 ST MARTIN D'HERES