MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARIE-FRANCE GUÉHO

# Le théorème d'Eichler sur le nombre de classes d'idéaux d'un corps de quaternions totalement défini et la mesure de Tamagawa

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 37 (1974), p. 107-114

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__107_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 107-114

# LE THEOREME D'EICHLER SUR LE NOMBRE DE CLASSES D'IDEAUX D'UN CORPS DE QUATERNIONS TOTALEMENT DEFINI ET LA MESURE DE TAMAGAWA

par

Marie France GUEHO

-:-:-:-

## I. - INTRODUCTION.

Nous allons donner la démonstration du théorème d'Eichler [2] sur le nombre de classes d'idéaux d'un corps de quaternions totalement défini, en partant du calcul du nombre de Tamagawa du groupe spécial linéaire de la variété induite par le corps de quaternions, calcul effectué en 1961 par Weil [10] . L'idée de relier le nombre de Tamagawa du groupe spécial linéaire à la formule d'Eichler m'a été suggérée par Serre (lettre à J. Martinet). La démonstration est analogue (Kneser [11]) à celle qui sert à démontrer l'équivalence entre le théorème de Siegel et le calcul du nombre de Tamagawa du groupe orthogonal. Si l'on se réfère à la publication de 1937 d'Eichler, déjà citée, le théorème que nous obtenons semble différent. On en retrouve en fait une forme équivalente (ce qui peut se démontrer de façon purement algébrique [4], [5]). En considérant le groupe projectif induit par le corps de quaternions, on retrouve exactement la formule d'Eichler, mais la formulation donnée au paragraphe II est plus utile pour les applications au nombre de classes d'idéaux d'un corps de quaternions sur des corps quadratiques [4], et aux propriétés de l'exposant de 2 dans la valeur au point -1 de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel [3], [8] .

## II. - NOMBRE DE TAMAGAWA DU GROUPE SPECIAL LINEAIRE.

Références : pour la géométrie algébrique, Weil [10] ; pour l'arithmétique, Deuring [1].

Soient $\Omega$ un corps "universel", $H_K$ un corps de quaternions totalement défini sur un corps de nombres $K$ , et posons $H = \Omega \otimes_K H_K$ . Fixons une base $u_1,\dots,u_4$ de $H_K$ ; tout élément $x \in H$ s'écrit $\sum_i x_i u_i$ , $x_i \in \Omega$ , et cette base, par $x \to (x_i)$, définit un plongement de $H$ dans l'espace affine $\Omega^4$. La multiplication de $H_K$ se prolonge naturellement à $H$ ; ainsi, $H$ est une <u>variété d'algèbre</u> définie sur $K$.

La norme réduite $\mathrm{Nrd}(\cdot) : H_K \to K$ est un homomorphisme multiplicatif, défini, sur la base $(u_i)$, par un polynôme homogène de degré 2. Le groupe algébrique $G = \{x \in H \mid \mathrm{Nrd}(x) = 1\}$ est défini sur $K$ ; on l'appelle le <u>groupe spécial linéaire</u> de $H$.

Soient $A$ l'anneau d'adèles de $K$ et $G_A$ le groupe adélisé de $G$, c'est-à-dire le produit restreint des $G_{K_v}$ par rapport à leurs sous-groupes compacts $G_{A_v}$ (si $E \subset \Omega$, on note $G_E$ les éléments de $G$ rationnels sur $E$). Le groupe $G_A$ opère sur les idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$, ordre maximal de $H$ : à l'idéal $\mathfrak{P}$ et à l'élément $x = (x_v)$ de $G_A$, on associe l'idéal $\mathfrak{P}x$ défini par ses composantes locales $(\mathfrak{P}x)_v = \mathfrak{P}_v x_v$, pour $v$ ultramétrique. On obtient bien un idéal, car, pour presque tout $v$, on a $\mathfrak{P}_v x_v = \mathfrak{O}_v$.

PROPOSITION 1. - <u>L'orbite d'un idéal à gauche de</u> $\mathfrak{O}$ <u>est l'ensemble des idéaux de même norme réduite</u>.

Par définition, deux idéaux d'une même orbite ont la même norme réduite ; la réciproque provient de la surjectivité de la norme réduite restreinte au groupe des unités d'un ordre maximal de $H_{K_v}$ sur le groupe $U_v$ des unités de $A_v$. Si $\mathrm{Nrd}(\mathfrak{P}_v) = \mathrm{Nrd}(\mathfrak{P}'_v)$, pour tout $v$ ultramétrique, il existe un élément $x_v \in H_{K_v}$, tel que :

$$\mathrm{Nrd}(x_v) \in U_v \quad , \quad \mathfrak{P}'_v = \mathfrak{P}_v x_v$$

mais on peut choisir $y_v \in H_{K_v}$ tel que

$$\mathrm{Nrd}(x_v) = \mathrm{Nrd}(y_v) \quad , \quad \mathfrak{P}_v = \mathfrak{P}_v y_v \quad ,$$

on pose $z = (z_v)$, avec $z_v = 1$ si $v$ est infinie et $z_v = y_v^{-1} x_v$ si $v$ est ultramétrique ; on a $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}z$ et $z \in G_A$.

Nous considérons maintenant l'orbite de $\mathfrak{O}$, que nous notons $\mathfrak{J}$ (mais ce choix n'est fait qu'en raison de sa simplicité). En vertu de la proposition précédente, $\mathfrak{J}$ est aussi l'ensemble des idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$ ou encore l'ensemble des classes $G'\backslash G_A$ si nous notons $G'$ le stabilisateur de $\mathfrak{O}$ dans $G_A$. $\mathfrak{J}$ peut être muni de la $G_K$-relation d'équivalence : $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}x$, $x \in G_K$ ; ce n'est pas la relation d'équivalence habituelle sur les idéaux, mais nous avons :

PROPOSITION 2. - Le nombre de $G_K$- classes dans une classe est fini. C'est l'indice $[U^+ : U_h]$ du groupe $U_h$ des normes réduites des éléments $x \in H_K$ tels que $\mathfrak{P}x = \mathfrak{P}$ pour un idéal $\mathfrak{P}$ de la classe $h$, dans le groupe $U^+$ des unités totalement positives de $K$.

On considère maintenant une mesure de Haar $\tau$ définie sur le groupe localement compact $G_A$ [par la suite, $\tau$ sera la mesure de Tamagawa de $G_A$]. Le groupe $G_K$ étant discret dans $G_A$, la mesure $\tau$ induit canoniquement une mesure sur $G_A/G_K$, notée encore $\tau$. Notons $x_1, \dots, x_t$ un système de représentants dans $G_A$ des doubles classes $G' \backslash G_A / G_K$. On a :

$$\tau(G_A/G_K) = \sum_{i=1}^{t} \tau(G' x_i \cdot G_K/G_K) .$$

Comme $\tau$ est invariante à gauche, on a :

$$1 = \sum_{i=1}^{t} \tau(x_i^{-1} G' x_i G_K/G_K) = \sum_{i=1}^{t} \tau(x_i^{-1} G' x_i/(G_K \cap (x_i^{-1} G' x_i)) \quad ;$$

de la définition même de $G'$, on déduit :

$$x_i^{-1} G' x_i \cap G_K = \{x \in G_K / \mathfrak{P}_i x = \mathfrak{P}_i\} \text{ , pour l'idéal } \mathfrak{P}_i = \mathfrak{O} x_i .$$

C'est le groupe formé des unités de norme réduite 1 de l'ordre à droite de $\mathfrak{P}_i$; on sait que ce groupe est fini, nous notons son ordre $\hat{W}_i$. Cet ordre ne dépend en fait que de la classe de l'idéal $\mathfrak{P}_i$ et nous permet de revenir aux classes d'idéaux usuelles :

Proposition 3. - On a :

$$\tau(G_A/G_K) = \tau(G') \sum_{i=1}^{h} \frac{[U^+ : U_i]}{\hat{W}_i} ,$$

où la somme est faite sur les classes d'idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$, de norme réduite (1).

Calcul de $\tau(G')$.

Référence : Weil [10], Tamagawa [9].

On choisit sur les complétés $K_v$ de $K$ les mesures canoniques $dx_v$ suivantes :

1) Si $v$ est réelle, $dx_v$ est la mesure de Lebesgue.

2) Si $v$ est ultramétrique, $dx_v$ est la mesure telle que

$$\int_{A} dx_v = 1 \quad .$$

(On note $A_v$ l'anneau des entiers de $K_v$, $U_v$ sera son groupe d'unités).

Sur le groupe algébrique $H^* = \{x \in H \mid Nrd(x) = 0\}$, on a une forme invariante à droite et à gauche de degré 4 :

$$\omega(x) = Nrd(x)^{-2}(dx_1)(dx_2)(dx_3)(dx_4) \quad ,$$

d'où on déduit pour toute valeur absolue $|\cdot|_v$ une mesure de Haar sur $H^*_{K_v}$ :

$$\omega_v(x) = |Nrd(x)|_v^{-2}(dx_1)_v \cdots (dx_4)_v \quad .$$

Sur le groupe algébrique $G_m$ induit par le groupe multiplicatif de $K$, la forme $\mu(x) = dx/x$ induit sur chaque $K^*_v$ une mesure de Haar

$$\mu_v(x) = (dx)_v / |x|_v \quad .$$

Des formes différentielles $\omega$ et $\mu$ on déduit une forme différentielle $\nu$ invariante à droite et à gauche, de degré 3, sur le noyau $G$ de la norme réduite, $Nrd : H^* \to G_m$. On déduit de $\nu$, sur chaque $G_{K_v}$, une mesure de Haar $\nu_v$, et on a la relation :

$$\int_{H^*_{K_v}} f(x)\omega_v(x) = \int_{Nrd(H^*_{K_v})} \mu_v(u) \int_{G_{K_v}} f(\dot{u}x)\nu_v(x)$$

pour toute fonction intégrable $f$ sur $H^*_{K_v}$ ; dans cette relation, on a $\dot{u} \in H^*_{K_v}$ et $Nrd(\dot{u}) = u$.

Pour presque tout $v$, l'application $x \to (x_i)$ définit un isomorphisme de $H^*_{A_v}$ sur $Gl_2(A_v)$, groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $A_v$ et inversibles. On a (10) :

$$\omega_v(H^*_{A_v}) = \int_{Gl_2(A_v)} (dx_1)_v \cdots (dx_4)_v = (1-N(P_v)^{-2})(1-N(P_v)^{-1})$$

$$\mu_v(U_v) = \int_{U_v} dx_v = 1 - N(P_v)^{-1}$$

$$\nu_v(G_{A_v}) = \omega_v(H^*_{A_v})/\mu_v(U_v) = 1 - N(P_v)^{-2} \quad .$$

La convergence au point 2 de la fonction zêta de $K$ entraîne celle du produit $\prod_v \nu_v(G_{A_v})$ et le produit de mesures $\tau = \prod_v \nu_v$ définit sur $G_A$

une mesure de Haar canonique (formule du produit), appelée mesure de Tamagawa de $G_A$. Le groupe $G_K$ étant discret dans $G_A$, la mesure $\tau$ induit canoniquement une mesure sur $G_A/G_K$ notée encore $\tau$ et on sait [10] que $\tau(G_A/G_K) = D_K^{3/2}$ où $D_K$ est le discriminant absolu de $K$.

Nous avons posé : $G' = \{x \in G_A , \mathfrak{O} x = \mathfrak{O}\}$, donc $G' = G_R^n \prod_{v\neq\infty} G'_{A_v}$, avec $G'_{A_v} = \{x \in \mathfrak{O}_v , \mathrm{Nrd}(x) = 1\}$. Nous constatons que le calcul de $\tau(G')$ se ramène à celui de $\nu_v(G'_{A_v})$ si $v$ est ultramétrique, de $\nu_v(G_R)$ si $v$ est réel.

1) $v$ ultramétrique. $H_{K_v}$ possède un ordre maximal unique $\mathfrak{O}_v$ (à isomorphisme près) qui est un $A_v$ module libre de rang 4. Soit $z_1 \dots z_4$ une base de $\mathfrak{O}_v$ sur $A_v$ ; alors

$$G'_{A_v} = \{x = \sum_i y_i z_i , y_i \in A_v , \mathrm{Nrd}(x) = 1\} ,$$

$$\omega_v(x) = |\mathrm{Nrd}(x)|_v (dx_1)_v \dots (dx_4)_v = N(P_v)^{m_v} |\mathrm{Nrd}(x)|_v (dy_1)_v \dots (dy_4)_v$$

où $m_v \in Z$ est défini par l'idéal $\Delta'^2$ de l'anneau des entiers de $K$ engendré par $\det[\mathrm{Trd}(u_i u_j)]$ et l'égalité (1) : $\Delta'^2 = \Delta^2 \prod_v P_v^{2m_v}$ ($\mathrm{Trd}(\cdot)$ est la trace réduite de $H_K$ dans $K$ prolongée naturellement à $H$).

Si $v$ n'est pas ramifié dans $H_K$, le plongement $x \to (y_i)$ associé à la base $z_i$ définit un isomorphisme du groupe $\mathfrak{O}_v^*$ des unités de $\mathfrak{O}_v$ sur $Gl_2(A_v)$. On a donc :

$$\nu_v(G'_{A_v}) = NP_v^{m_v} \omega_v(Gl_2(A_v))/\mu_v(U_v) = NP_v^{m_v}(1-N(P_v)^{-2}) .$$

Si $v$ est ramifié dans $H_K$, on a :

$$\omega_v(\mathfrak{O}_v^*) = NP_v^{m_v}(1-N(P_v)^{-2})$$

$$\mu_v(U_v) = 1 - NP_v^{-1}$$

$$\nu_v(G'_{A_v}) = NP_v^{m_v}(1-NP_v^{-2})(1-NP_v^{-1})^{-1} .$$

Si nous calculons le produit des $\nu_v(G'_{A_v})$, nous obtenons :

$$\prod_{v\neq\infty} \nu_v(G'_{A_v}) = \zeta_K(2)^{-1} N(\Delta') \prod_{P|\Delta} (NP-1)^{-1}$$

2) $v$ réel. Chaque plongement $\sigma$ de $K$ dans $\mathbb{R}$ définit une valeur absolue réelle $|\cdot|_{v_\sigma}$ et un plongement $\sigma'$ de $H_K$ dans $H_{\mathbb{R}}$ :

$$|x|_{v_\sigma} = |\sigma(x)| \quad \text{pour} \quad x \in K ,$$

$$\sigma'(x) = \sum_i \sigma(x_i)\sigma'(u_i) \quad \text{pour} \quad x = \sum_i x_i u_i \in H_K ,$$

les $\sigma'(u_i)$ étant définis par les relations

$$\sigma'(u_i)\sigma'(u_j) = \sum_k \sigma(a_{ijk})\sigma'(u_k) \quad \text{si} \quad u_i u_j = \sum_k a_{ijk} u_k .$$

Il n'existe qu'un corps de quaternions sur $\mathbb{R}$ et la base que l'on choisit habituellement est formée des éléments $1$ , $i$ , $j$ , $ij$ liés par $i^2 = -1$ , $j^2 = -1$ , $ij = -ji$ , car si $y_1 \ldots y_4$ sont les composantes d'un quaternion $x \in H_{\mathbb{R}}$ sur cette base, sa norme réduite s'écrit : $\mathrm{Nrd}(x) = \sum_i y_i^2$ , et on a

$$\omega_{v_\sigma}(x) = 4\sigma(\delta')^{-1} dy_1 \ldots dy_4 .$$

$$\delta' = [\det(\mathrm{Trd}(u_i u_j))]^{1/2} .$$

Nous intégrons sur $H^*_{\mathbb{R}}$ la fonction $f(x) = \mathrm{Nrd}(x)^2 e^{-\mathrm{Nrd}(x)}$ . La suite

$$1 \to G_{\mathbb{R}} \to H^*_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} \mathbb{R}^+ \to 1$$

étant exacte, on peut écrire :

$$\int_{H^*_{\mathbb{R}}} f(x)\omega_{v_\sigma}(x) = \nu_{v_\sigma}(G_{\mathbb{R}}) \int_0^\infty e^{-u} u^2 \frac{du}{u} ,$$

$$4\sigma(\delta')^{-1} [\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx]^4 = \nu_{v_\sigma}(G_{\mathbb{R}}) \int_0^\infty e^{-u} u^2 \frac{du}{u} ,$$

$$\nu_{v_\sigma}(G_{\mathbb{R}}) = 4\pi^2\sigma(\delta')^{-1} , \quad \prod_{v\,\infty} \nu_v(G_{\mathbb{R}}) = 4^n \pi^{2n} N(\delta')^{-1} .$$

Compilant ces calculs on aboutit à :

$$\tau(G') = 4^n \pi^{2n} \zeta_K(2)^{-1} \prod_{P|\Delta} (N(P)-1)^{-1} ,$$

$$\tau(G') = 2^n \zeta_K(-1)^{-1} \prod_{P|\Delta} (1-N(P))^{-1} .$$

Nous avons ainsi obtenu une amélioration du théorème d'Eichler :

THEOREME. - Soit $H_K$ un corps de quaternions totalement défini sur un corps de nombres algébriques $K$ ; soit $h$ le nombre de classes des idéaux à gauche d'un ordre maximal $\mathfrak{O}$ de $H_K$ de norme réduite un idéal donné. Alors :

$$\zeta_K(-1) \prod_{P|\Delta} (1-N(P)) = 2^n \sum_{i=1}^{h} \frac{[U^+:U_i]}{\hat{w}_i} .$$

<u>On désigne par</u> :

$\zeta_K(.)$ <u>la fonction zêta de</u> $K$

$N(.)$ <u>la norme absolue de</u> $K$

$n$ <u>le degré absolu de</u> $K$

$U^+$ <u>le groupe des unités totalement positives de</u> $K$

$\Delta$ <u>le discriminant de</u> $H_K$ <u>sur</u> $K$

$\sum_{i=1}^{h}$ <u>la sommation sur les classes des idéaux à gauche de</u> $\mathfrak{O}$ <u>de norme réduite un idéal donné</u>

$U_i$ <u>le groupe des normes réduites des</u> $x \in H_K$ <u>tels que</u> $\mathfrak{P}_i x = \mathfrak{P}_i$ <u>pour un idéal</u> $\mathfrak{P}_i$ <u>représentant d'une classe</u>

$\hat{w}_i$ <u>l'ordre du groupe de ces éléments de norme réduite</u> 1 .

(Nous avons donné la démonstration de ce théorème lorsque l'idéal considéré est l'anneau d'entiers de $K$ , puis il est facile de la généraliser à un idéal quelconque).

-:-:-:-

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. DEURING - Algebren, Springer Verlag. Berlin 1968.

[2] M. EICHLER - Uber die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren. Math. Zeit. 43, 1937, 102-109.

[3] J. FRESNEL - Valeur des fonctions zêta aux entiers négatifs. Sém. de théorie des nombres. Bordeaux 1970-1971, n° 27.

[4] M.F. GUEHO - Corps de quaternions sur un corps de nombres algébriques. Thèse de 3e cycle. Bordeaux 1972.

[5] M.F. GUEHO - Corps de quaternions et fonction zêta au point -1 . C.R.A. S. 274, 1972, 296-298.

[6] S. LANG - Algebraic Number Theory. Addison Wesley.

[7] J.P. SERRE - Corps locaux. Hermann.

[8] J.P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets. Annals of Math. Studies, 70, 77-170.

[9] T. TAMAGAWA - Adèles. Proc. Sympos. Pure Math., IX, 1966, 114-121.

[10] A. WEIL - Adeles and algebraics groups. Princeton 1961.

[11] CASSELS-FROHLICH - Algebraic Number Theory. Exposé de M. KNESER : Semi-simple Algebraic Groups. Academic Press.

-:-:-:-

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération

33405 TALENCE