PIERRE KAPLAN

Sur le 2-groupe des classes des corps quadratiques

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 115-116
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__115_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 115-116

SUR LE 2-GROUPE DES CLASSES DES CORPS QUADRATIQUES

par

Pierre KAPLAN

-:-:-:-

Il s'agit d'une méthode qui permet d'obtenir de nombreux résultats concernant l'existence de cycles d'ordre au moins 8 dans le 2-groupe (C_2) des classes d'idéaux au sens strict des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, où D est un entier quadratfrei. Si $D > 0$ ($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ réel), on obtient simultanément des résultats concernant la résolubilité des équations "non pelliennes" $x^2-Dy^2 = d$, où $d \neq 1$ est un diviseur quadratfrei du discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Voici quelques exemples de résultats nouveaux obtenus ainsi, concernant (C_2) ; $C(m)$ désigne un groupe cyclique d'ordre m , $C(\geq 2^n)$ un groupe cyclique d'ordre 2^k , où $k \geq n$. p, p' et q désignent des nombres premiers.

1) <u>Cas où</u> $D = 2p$, <u>où</u> $p = a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod 8$ <u>avec</u> $b \equiv 0 \pmod 4$: $(C_2) = C\ (\geq 8)$ <u>si, et seulement si</u>, $a \equiv \pm 1$ <u>et</u> $b \equiv 0 \pmod 8$. <u>Sinon</u> $(C_2) = C(4)$.

2) <u>Cas où</u> $D = pq$, $p = u^2 + 2v^2 \equiv 1 \pmod 8$, $q = w^2 + 2z^2 \equiv 3 \pmod 8$ <u>tels que</u> $(\frac{p}{q}) = 1$; $(\frac{uz+vw}{p})$ ne dépend pas des signes de u , v , w , z . $(C_2) = C\ (\geq 8) \times C(2)$ <u>si, et seulement si</u>, $(\frac{uz+vw}{p}) = (\frac{q}{p})_4 = 1$. <u>Sinon</u> $(C_2) = C(4) \times C(2)$.

Si $q = 3$, on trouve :

2') <u>Cas</u> $D = 3p$, où $p = u^2 + 2v^2 = x^2 + 3y^2 \equiv 1 \pmod{24}$: $(C_2) = C(\geq 8) \times C(2)$ <u>si, et seulement si</u>, $u+v \equiv \pm 1$ et $x \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

La méthode de démonstration est élémentaire, n'utilise rien d'autre que la théorie des formes quadratiques binaires et permet même de retrouver les résultats nécessaires concernant la réciprocité biquadratique, par exemple la formule :

$$(\frac{p}{p'})_4 (\frac{p'}{p})_4 = (\frac{aa'+bb'}{p}) = (\frac{aa'+bb'}{p'})$$

où $p = a^2 + b^2 \equiv p' = a'^2 + b'^2 \equiv 1 \pmod 4$, $(\frac{p}{p'}) = 1$ et $b \equiv b' \equiv 0 \pmod 2$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

1) Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques réels dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique, Comptes rendus, A 275 (1972), pp. 887-890.

2) Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratique, Journal of the Mathematical society of Japan, Vol. 25 (1973), n°4.

3) 2-groupe des classes et facteur principal de $Q(\sqrt{pq})$, où $p \equiv -q \equiv 1$ (mod 4), Comptes rendus, A 276 (1973), pp. 89-92.

4) Sur le 2-groupe des classes des corps quadratiques. (Thèse) J. reine und angew. Math. (à paraître).

Pierre KAPLAN
9, rue des sœurs Macarons
54000 NANCY