MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES MEYER

Les nombres de Pisot et la synthèse spectrale

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 117-120
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__117_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 117-120

LES NOMBRES DE PISOT ET LA SYNTHESE SPECTRALE

par

Yves MEYER

-:-:-:-

Pour des ensembles compacts de nombres réels, du type défini par Cantor, mais construits à l'aide d'un rapport de dissection $\theta > 2$, la solution d'une forme forte du problème de la synthèse spectrale conduit à une classe particulière de nombres de Pisot.

1. Système projectif de sommes trigonométriques.

Soit $\theta > 2$ un nombre réel et $\sigma = (t_k)_1^\infty$ une suite décroissante de nombres réels tendant assez rapidement vers 0 pour que $t_{k+1} \leq t_k/\theta$. Un système projectif de sommes trigonométriques associé à la suite σ est une suite $(P_k)_1^\infty$ de sommes trigonométriques, fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes et définies par

$$(1.1)\qquad \begin{cases} P_1(x) = a(0) + a(1)e^{it_1x} \\ P_2(x) = a(0,0) + a(0,1)e^{it_2x} + a(1,0)e^{it_1x} + a(1,1)e^{i(t_1+t_2)x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_k(x) = \Sigma a(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)e^{i(\varepsilon_1t_1+\ldots+\varepsilon_kt_k)x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

où la somme Σ est étendue aux 2^k suites $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$ de 0 ou de 1 . Les relations de compatibilité entre les P_k sont définies par

$$(1.2)\qquad \begin{cases} a(0,0) + a(0,1) = a(0) \quad , \quad a(1,0) + a(1,1) = a(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,0) + a(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,1) = a(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Les relations (1.2) signifient que, si dans $P_{k+1}(x)$, $t_{k+1}x$ est formellement remplacé par 0 partout où il intervient, alors P_{k+1} devient P_k . L'interprétation intuitive est la suivante : les $(P_k)_1^\infty$ correspondent aux corrections successives faites dans l'analyse d'un phénomène périodique perturbé défini par une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. D'abord il semble à l'observateur que le phénomène soit exactement périodique et décrit par $P_1(t)$. Mais des expériences plus précises sur des intervalles de temps plus longs montrent que les coefficients $a(0)$ et $a(1)$ de P_1 ne sont pas constants mais ont des variations "séculaires" lentes : c'est-à-dire qu'il faut remplacer $a(0)$ par $a(0,0) + a(0,1)e^{it_2x}$ et $a(1)$ par $a(1,0) + a(1,1)e^{it_2x}$. Quand x n'est pas très grand, en remplaçant t_2x par 0 dans les nouvelles expressions de $a(0)$ et $a(1)$, on doit retrouver les anciennes : d'où les relations (1.2). Maintenant φ est une fonction presque périodique P_2 dans laquelle interviennent quatre coefficients $a(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. De meilleures observations montrent que ces coefficients ont de très très lentes perturbations de période $2\pi/t_3$. Nous voilà conduits à P_3 , etc.

2. Système projectif borné.

Venons à un problème mathématique. Tout d'abord, quelle condition doit-on imposer à un système projectif pour que la suite $(P_k)_1^\infty$ converge vers une fonction limite φ ? Peut-on décrire l'espace des fonctions limites ainsi obtenues ?

Nous allons nous intéresser à un type très particulier de système projectif décrit par la définition suivante.

Définition. Un système projectif $(P_k)_1^\infty$ est dit borné si $\sup_{k\geq 1} \|P_k\|_\infty < +\infty$.

On rappelle que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et bornée, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Le spectre de f , noté $\operatorname{Sp} f$ est, par définition, le support de la transformée de Fourier de f , prise au sens des distributions.

Les résultats suivants sont très faciles à obtenir. Soit $(P_k)_1^\infty$ un système projectif borné associé à $\sigma = (t_k)_1^\infty$. Alors $P_k \to \varphi$ $(k\to\infty)$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et bornée ; son spectre est contenu dans l'ensemble compact E de toutes les sommes infinies $\sum_1^\infty \varepsilon_k t_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 .

L'application qui à $(P_k)_1^\infty$ associe φ est injective. En effet, soit pour tout $k \geq 1$, F_k l'ensemble des 2^k sommes $\varepsilon_1 t_1 + \ldots + \varepsilon_k t_k$ $(\varepsilon_j=0$ ou $1)$ et R_k l'ensemble compact de toutes les sommes infinies $\sum_{k+1}^\infty \varepsilon_j t_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 . Alors toute fonction continue et bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $k \geq 1$ sous la forme

$$\varphi(x) = \sum \varphi_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)}(x) e^{i(\varepsilon_1 t_1+\ldots+\varepsilon_k t_k)x} \tag{2.1}$$

où la somme est étendue aux 2^k suites $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ de 0 ou de 1 et où le spectre de chaque fonction continue et bornée $\varphi_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)}$ est contenu dans R_k. Ceci dit, le seul système projectif $(P_k)_1^\infty$ dont φ puisse être la limite est défini par

(2.2) $$P_k(x) = \sum \varphi_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)}(0) e^{i(\varepsilon_1 t_1+\dots+\varepsilon_k t_k)x}$$

3. Le problème de la synthèse spectrale.

L'analyse faite au § 2 conduit à poser le problème suivant (une forme extrêmement précise du problème général de la synthèse spectrale).

Problème. Toute fonction continue et bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont le spectre est contenu dans E est-elle la limite d'un système projectif borné associé à la suite $\sigma = (t_k)_1^\infty$?

On rappelle que E est l'ensemble compact de toutes les sommes infinies $\sum_1^\infty \varepsilon_k t_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

Le seul système possible admettant φ pour limite est défini par (2.1) et (2.2) et le problème que nous venons de poser revient à savoir s'il existe une constante C ne dépendant que de σ et telle que, pour tout $k \geq 1$, $\sup_{\mathbb{R}} |P_k| \leq C \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$.

Aucune condition nécessaire et suffisante sur σ n'est connue. On sait seulement, d'après R. Schneider ([2]) que la condition $\sum_{k\geq 1} (t_{k+1}/t_k)^2 < +\infty$ est suffisante.

4. Cas où $t_k = \theta^{-k}$.

Dans ce cas, on peut donner une réponse très précise.

Théorème. Soient $\theta > 2$ un nombre réel, σ la suite $(\theta^{-k})_1^\infty$ et E l'ensemble compact de toutes les sommes infinies $\sum_1^\infty \varepsilon_k \theta^{-k}$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Alors les trois conditions a), b) et c) ci-dessous sont équivalentes :

a) θ est un nombre de Pisot de degré $n \geq 1$ et toute relation $\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \dots + \varepsilon_k\theta^k = (1-\theta^{k+1})(q_0+q_1\theta+\dots+q_{n-1}\theta^{n-1})$ dans laquelle $k \geq 0$, $\varepsilon_j = -1, 0$ ou 1 pour $0 \leq j \leq k$ et $q_j \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leq j \leq n-1$ entraîne $0 = \varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_k = q_0 = \dots = q_{n-1}$.

b) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout système projectif borné $(P_k)_1^\infty$ associé à $\sigma = (\theta^{-k})_1^\infty$, de limite φ, pour tout x réel et tout $j \geq 1$, on ait $|\varphi(x)-P_j(x)| \leq C\,\theta^{-j}|x|\,\|\varphi\|_\infty$.

c) Toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et bornée et dont le spectre est contenu dans E est la limite d'un système projectif borné associé à $\sigma = (\theta^{-k})_1^\infty$.

La preuve de ce résultat est donnée dans le premier numéro d'Astérisque ([2]).

Si $\theta \geq 3$ est un entier naturel, a) est satisfaite. Si au contraire $\theta = \frac{m+2+\sqrt{m^2+4}}{2}$ et $m \geq 1$, θ est un nombre de Pisot mais a) n'est pas satisfaite car $1 = (1-\theta)(m+1-\theta)$.

Si $\theta > 2$ est un nombre de Pisot, on peut montrer que toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont le spectre est contenu dans E est la limite uniforme, sur tout compact de $\mathbb{R}$, d'une suite $(Q_k)_1^\infty$ de sommes trigonométriques telle que :

a) les fréquences de Q_k appartiennent à E ;

b) $\|Q_k\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$.

Le théorème ci-dessus montre que, si le nombre de Pisot θ ne satisfait pas a), les Q_k ne sont pas obtenus par le procédé canonique défini par (2.1) et (2.2).

D'autre part, on ne sait rien lorsque θ n'est pas un nombre de Pisot (on sait seulement que le procédé canonique ne permet pas d'approcher les fonctions continues et bornées dont le spectre est contenu dans E).

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. MEYER - Algebraic numbers and harmonic analysis. North Holland (1972).

[2] Y. MEYER - Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. Astérisque 1, SMF (1973).

-:-:-:-

Université de Paris Sud, Centre d'Orsay
Dept. de Mathématiques, Bâtiment 425
91405 ORSAY