

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JACQUES QUEYRUT

**Sur l'équation fonctionnelle des séries  $L$  d'Artin  
pour des caractères réels**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 37 (1974), p. 133-135

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_37\\_\\_133\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__133_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'EQUATION FONCTIONNELLE  
DES SERIES L D'ARTIN POUR DES CARACTERES REELS

par

Jacques QUEYRUT (Bordeaux)

-:-:-:-

Soient  $k$  un corps de nombres et  $N$  une extension galoisienne finie de  $k$  de groupe de Galois  $G$ . Soit  $R_{\mathbb{R}}(G)$  l'anneau des caractères virtuels de  $G$  réalisables sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $\chi \in R_{\mathbb{R}}(G)$ ; on sait que c'est une condition plus restrictive que de dire que  $\chi$  est à valeurs réelles. La série  $L$  d'Artin généralisée vérifie une équation fonctionnelle de la forme (voir Lang [1], p.300)

$$W(\chi, N/k) \Lambda(s, \chi) = \Lambda(1-s, \bar{\chi}) .$$

Si  $\chi$  est à valeurs réelles, il est évident que  $W(\chi, N/k) = \pm 1$ ; le problème de la caractérisation des corps pour lesquels  $W = +1$  ou  $-1$  est lié à celui des zéros de la fonction  $\zeta$  de Dédekind au point  $s = 1/2$ ; si  $W(\chi, N/k) = -1$ ,  $\zeta_N(s)/\zeta_k(s)$  a un tel zéro.

Fröhlich a montré que, pour un caractère de degré 2 d'une extension  $N$  quaternionienne de degré 8 sur  $\mathbb{Q}$ , la constante  $W$  pouvait prendre les deux valeurs  $+1$  et  $-1$  et que si cette extension était modérément ramifiée la valeur de  $W$  dépendait de l'existence de bases normales d'entiers (voir [3]); un tel caractère est à valeurs réelles et non réalisable sur  $\mathbb{R}$ .

Théorème. Soient  $k$  un corps de nombres;  $N$  une extension galoisienne de  $k$  de groupe de Galois  $G$ ,  $\chi$  un caractère virtuel de  $G$  réalisable sur  $\mathbb{R}$ , alors la constante  $W(\chi, N/k)$  de l'équation fonctionnelle des séries  $L$  d'Artin vaut  $+1$ .

Ceci a été conjecturé par J.P. Serre et a été démontré indépendamment par A. Fröhlich et moi-même. Nous avons donné une rédaction de la démonstration en commun dans [5].

En utilisant un argument de Serre, on se ramène tout d'abord au cas dié-

dral. Soit  $\chi \in R_{\mathbb{R}}(G)$  ; d'après un théorème de Brauer-Witt [4] n° 2-4, et une proposition de Serre [2], on peut écrire  $\chi$  comme combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de caractères induits  $\text{Ind}_G^{H_1}(\theta_1)$ , où  $H_1$  est un sous-groupe de  $G$  et où  $\theta_1 \in R_{\mathbb{R}}(H_1)$  et est de degré 1 ou 2 :

$$\chi = \sum_{i \in S} n_i \text{Ind}_G^{H_1}(\theta_1) .$$

Les propriétés de  $W$  (voir [1], p.233) entraînent que :

$$W(\chi) = \prod_{i \in S} W(\theta_1, N/k_1)^{n_i} .$$

Si  $\theta_1$  est de degré 1,  $\theta_1$  est l'identité ou quadratique ; alors  $W(\theta_1) = +1$ .

Si  $\theta_1 = \psi + \bar{\psi}$  est la somme de deux caractères conjugués,  $W(\theta_1) = W(\psi)W(\bar{\psi})$  ; or  $W(\psi)$  est un nombre complexe de module 1 et  $W(\bar{\psi}) = \overline{W(\psi)}$  : d'où  $W(\theta_1) = +1$ .

Si  $\theta_1$  est de degré 2 et irréductible, on peut se ramener au cas où  $\theta_1$  est fidèle ;  $H_1$  est alors isomorphe à un groupe diédral.

On suppose donc désormais que  $G$  est diédral, c'est-à-dire que  $G$  est engendré par  $\sigma$  et  $\tau$  tels que  $\sigma^n = 1$ ,  $\tau^2 = 1$ ,  $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ , et que  $\chi$  est un caractère irréductible fidèle de degré 2 de  $G$  ;

$$\chi(s) = \varphi(s) + \bar{\varphi}(s) \quad \text{pour tout } s \in C \text{ (groupe engendré par } \sigma \text{)} ;$$

on a  $\chi(s\tau) = 0$  ;

où  $\varphi$  est un caractère primitif de  $C$ .

$\chi$  est induit par  $\varphi$ , d'où  $W(\chi, N/k) = W(\varphi, N/E)$  si  $E$  est le corps des invariants de  $C$ . Par composition avec l'application de réciprocité globale, on peut considérer  $\varphi$  comme un caractère du groupe des classes d'idèles  $C_E$  de  $E$ .

Le transfert de  $\text{Gal}(N/k)^{ab}$  dans  $\text{Gal}(N/E)$  montre que la restriction de  $\varphi$  à  $C_k$  groupe des classes d'idèles de  $k$  est l'identité et que cette propriété caractérise les extensions diédrales. On est donc ramené à démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** Soit E une extension quadratique d'un corps de nombres k et  $\varphi$  un caractère de  $C_E$  d'ordre fini tel que  $\varphi/C_k = 1$  ; alors  $W(\varphi) = 1$ .

Ce théorème se démontre en utilisant de façon fondamentale le fait que  $\varphi/C_k = +1$  et que le conducteur de  $\varphi$  est un idéal étendu de k à E ; on démontre que si  $\Delta$  est tel que  $E = k[\Delta]$ ,  $\Delta^2 \in k^*$ , si  $v_0$  est une place de k et si v est au-dessus de  $v_0$  dans E, alors

$$\prod_{v/v_0} W_v(\varphi) = \varphi(\delta) \quad \text{où } W_v \text{ est la composante locale de } W$$

et  $\delta$  l'idèle  $(x_w)_w$  avec  $x_w = 1$  si  $w \neq v$ ,  $x_w = \Delta$  si  $w = v$  ; on a donc  $W(\varphi) = \varphi((\Delta))$  où  $(\Delta)$  est l'idèle principal  $(x_w)_w$  avec  $x_w = \Delta$  pour tout w ; d'où  $\varphi(\Delta) = 1$ , et  $W(\varphi) = +1$ .

--:--:--

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] LANG - Algebraic Number Theory. Addison-Wesley, 1970.
- [2] SERRE - Conducteur d'Artin des caractères réels. Inventiones Math. 14 (p. 173-183) 1971.
- [3] FRÖHLICH - Artin root numbers and normal integral bases for quaternions fields. Inventiones Math. 17 (p. 143-166) 1972.
- [4] SERRE - Représentations linéaires des groupes finis. Hermann, 1970.
- [5] FRÖHLICH-QUEYRUT - On the functional equation of the Artin L-functions for characters of real representation. (A paraître).

--:--:--

Jacques QUEYRUT  
E.R.A. n° 362  
Université de Bordeaux I  
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique  
351, cours de la Libération  
33405 - TALENCE