

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE SERRE

Fonctions zêta p -adiques

Mémoires de la S. M. F., tome 37 (1974), p. 157-160

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__157_0

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS ZÊTA p -ADIQUES

par

Jean-Pierre SERRE

-:-:-:-

Le présent exposé résume, sans démonstrations, une partie des résultats de [4]. Il s'agit -en gros- d'attacher à tout corps de nombres totalement réel K , et à tout nombre premier p , une fonction zêta p -adique au sens de Kubota-Leopoldt ([1], [2], [3]), autrement dit une fonction analytique p -adique qui prenne les mêmes valeurs que la fonction zêta usuelle de K aux entiers négatifs (à un facteur correctif près). La définition et les premières propriétés d'une telle fonction font l'objet du §2. Le §1 est préliminaire ; il précise la notion de "fonction analytique p -adique" utilisée.

Pour simplifier, on suppose $p \neq 2$; pour le cas $p = 2$, voir [4].

§1. L'ALGÈBRE D'IWASAWA Λ .

C'est une algèbre de fonctions sur \mathbb{Z}_p , à valeurs dans \mathbb{Z}_p . Ses éléments peuvent être caractérisés de diverses façons (leur équivalence est démontrée dans [4], §4) :

(i) Une fonction f appartient à Λ si et seulement si elle est limite uniforme de fonctions de la forme

$$s \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i u_i^s, \quad a_i \in \mathbb{Z}_p, \quad u_i \in \Gamma,$$

où Γ désigne le groupe multiplicatif $1+p\mathbb{Z}_p$.

(ii) (d'après B. Mazur). On a $f \in \Lambda$ si et seulement si il existe une mesure (simplement additive) μ sur Γ , à valeurs dans \mathbb{Z}_p , telle que

$$f(s) = \int_{\Gamma} u^s \mu(u) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Z}_p.$$

Par définition, μ appartient à l'algèbre $A = \varprojlim_p \mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$, où $\Gamma_n = 1 + p^n \mathbb{Z}_p$. Or, on sait (cf. [2], §6) que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de séries formelles $\mathbb{Z}_p[[T]]$, l'isomorphisme dépendant du choix d'un générateur topologique $1+\pi$ du groupe Γ . On en déduit :

(iii) Le changement de variables

$$1 + T = (1+\pi)^S$$

identifie Λ à l'algèbre $A = \mathbb{Z}_p[[T]]$.

(iv) On a $f \in \Lambda$ si et seulement si f a un développement de Taylor de la forme

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n s^n / n! , \quad \text{avec } b_n \in \mathbb{Z}_p ,$$

les b_n vérifiant en outre les congruences

$$\sum_{i=1}^n c_{in} b_i \equiv 0 \pmod{n! \mathbb{Z}_p} \quad \text{pour tout } n \geq 1 ,$$

où les c_{in} sont des entiers définis par l'identité

$$\sum_{i=1}^n c_{in} Y^i = Y(Y-1)\dots(Y-n+1) .$$

En particulier, les éléments de Λ sont holomorphes (au sens strict) sur un disque plus grand que le disque unité.

(v) On a $f \in \Lambda$ si et seulement si f a un développement binomial de la forme

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p^n \binom{s}{n} , \quad \text{avec } d_n \in \mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad \binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} ,$$

les d_n vérifiant en outre les congruences

$$\sum_{i=1}^n c_{in} d_i \equiv 0 \pmod{n! \mathbb{Z}_p} \quad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

§2. FONCTIONS ZÊTA p -ADIQUES.

Soit K un corps de nombres totalement réel, de degré r , et soit ζ_K sa fonction zêta. D'après un théorème de Siegel, les valeurs de ζ_K aux entiers négatifs sont des nombre rationnels ; on peut les considérer comme des éléments de \mathbb{Q}_p .

Soient $u \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{Z}_p$. Choisissons une suite d'entiers négatifs n_i , tendant vers $-\infty$ (au sens usuel), tendant vers s (dans \mathbb{Z}_p), et tels que $n_i \equiv u \pmod{p-1}$. On peut alors montrer (cf. [4], n°5.3) que les nombres rationnels $\zeta_K(n_i)$ ont une limite dans \mathbb{Q}_p , mis à part le cas $s = 1$, $r(u-1) = 0$; cette limite est indépendante de la suite (n_i) choisie ; on la note $\zeta_K^*(s, u)$.

Les $p-1$ fonctions $s \mapsto \zeta_K^*(s, u)$ sont les "fonctions zêta p -adiques" de K .

Elles jouissent des propriétés suivantes :

(i) Si u est pair, i.e. si $u \in 2\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, on a $\zeta_K^*(s, u) = 0$. Si u est impair, la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(s, u)$ n'a qu'un nombre fini de zéros.

(ii) Si n est un entier ≤ 0 , et si u désigne sa classe mod $(p-1)$, on a ([4], th.20) :

$$\zeta_K^*(n, u) = \zeta_K(n) \prod_{v|p} (1 - Nv^{-n}) ,$$

i.e. $\zeta_K^*(n, u)$ est la valeur en n de la fonction ζ_K "débarrassée de ses termes en p ".

Il y a une formule analogue pour $\zeta_K^*(n, u)$ quand n est un entier ≤ 0 et u un élément quelconque de $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$: la fonction ζ_K est alors remplacée par une fonction L (cf. [4], th.22).

(iii) Supposons $ru \neq r$ dans $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Alors la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(s, u)$ appartient à l'algèbre d'Iwasawa Λ ([4], th.21). En particulier, c'est une fonction holomorphe de s sur un disque plus grand que le disque unité ; ses valeurs sont des entiers p -adiques vérifiant des congruences analogues à celle de Kummer.

(iv) Si $ru = r$, la fonction $s \mapsto \zeta_K^*(1-s, u)$ est de la forme $h(T)/((1+T)^r - 1)$, avec $h \in \Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$. En particulier, la fonction $s \mapsto (s-1)\zeta_K^*(s, u)$ est holomorphe dans un disque contenant le disque unité.

On a des résultats analogues pour les fonctions zêta "partielles" attachées aux classes d'idéaux du corps K .

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. FRESNEL, - Nombres de Bernoulli et fonctions L p -adiques, Ann. Inst. Fourier, 17, 1967, pp. 281-333.
- [2] K. IWASAWA, - Lectures on p -adic L functions, Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. Press, 1972.
- [3] T. KUBOTA et H.W. LEOFOLDT, - Eine p -adische Theorie der Zetawerte, J. Crelle, 214-215, 1964, pp. 328-339.

- [4] J-P. SERRE . - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Modular Functions of One variable, Lecture Notes in Math. n°350, pp. 191-268, Springer-Verlag 1973.

-:--:-

Collège de France
11, place Marcelin Berthelot
75005 PARIS