

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ERMANNO MARCHIONNA

## Sur les variétés algébriques complètement régulières

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 38 (1974), p. 45-51

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1974\\_\\_38\\_\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__38__45_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES VARIETES ALGEBRIQUES COMPLETEMENT REGULIERES

par Ermanno MARCHIONNA

10/ Nous exposons ici quelques propriétés des variétés algébriques normales qui sont complètement régulières ; les démonstrations relatives seront publiées dans notre travail [13] à paraître. Pour rendre plus clair l'exposé, il est convenable de faire quelques rappels sur les index d'irrégularité d'un diviseur et sur les irrégularités d'une variété normale.

Soit  $V_d$  une variété algébrique irréductible de dimension  $d \geq 2$  appartenant à un espace projectif complexe  $S_r$  de dimension  $r$  ; supposons que  $V_d$  soit une variété (localement) normale au sens de Zariski.

Soit  $D$  un diviseur de la variété, c'est-à-dire un cycle de dimension  $d-1$  au sens de Zariski-Weil (hypersurface virtuelle de Severi).

Considérons  $d-1$  hypersurfaces  $E_{m_1}, E_{m_2}, \dots, E_{m_{d-1}}$  découpées sur  $V_d$  par  $d-1$  formes génériques de l'espace ambiant  $S_r$ , ayant les ordres  $m_1, m_2, \dots, m_{d-1}$ .  
 Considérons aussi la sous-variété normale :

$$W_{d-h} = E_{m_1} \cap E_{m_2} \cap \dots \cap E_{m_h}, \quad (h=1, 2, \dots, d-1).$$

Soit

$$(D_h) = |D + E_{m_1} + \dots + E_{m_h}| \cdot W_{d-h}$$

le système linéaire découpé sur  $W_{d-h}$  par le système linéaire complet  $|D + E_{m_1} + \dots + E_{m_h}|$  tracé sur  $V_d$ .

Indiquons par  $\sigma^h[D]$  le défaut du système  $(D_h)$ ,  $(= \dim |D_h| - \dim(D_h))$ , lorsque les ordres  $m_i$  sont assez élevés, c'est-à-dire plus grands qu'un certain entier  $\lambda[D]$  défini en [11], qui dépend seulement du système complet  $|D|$  et de la variété  $V_d$ .

On démontre que l'entier non négatif  $\sigma^h[D]$  dépend seulement du système  $|D|$  et pas même des hypersurfaces  $E_{m_i}$  que l'on a employées dans la définition (cfr. [11], n.8).

Nous disons que  $\sigma^h[D]$  est l'h<sup>me</sup> index d'irrégularité du diviseur  $D$  et du système  $|D|$ .

Indiquons maintenant par  $K$  un diviseur du système canonique de  $V_d$ , et considérons les genres géométrique et arithmétique de  $V_d$  :

$$P_g(V_d) = \dim|K| + 1$$

$$P_a(V_d) = \delta(K) + 1 + (-1)^{d+1},$$

où  $\delta(K)$  est la dimension virtuelle du système  $|K|$ . On appelle irrégularité d-dimensionnelle de  $V_d$ , (ou dernière irrégularité), l'entier relatif

$$q_d = P_g(V_d) - P_a(V_d)$$

Envisageons encore la sous-variété  $W_{d-h} = E_{m_1} \cap \dots \cap E_{m_h}$ , et soit

$$q_{d-h}(W_{d-h}) = P_g(W_{d-h}) - P_a(W_{d-h})$$

sa dernière irrégularité. On démontre que, si l'on choisit les ordres  $m_1, \dots, m_h$  assez élevés ( $> \lambda[K]$ ), l'entier  $q_{d-h}(W_{d-h})$  dépend seulement de la variété  $V_d$  et pas même des hypersurfaces  $E_{m_1}, \dots, E_{m_h}$  que l'on a employées dans la définition.

On dit alors que  $q_{d-h}(W_{d-h})$  est l'irrégularité de dimension  $d-h$  de la variété  $V_d$ ; elle sera indiquée par  $q_{d-h}$ . On vérifie très facilement que  $q_1 = 0$ ,  $q_2 \geq 0$ .

On démontre (cfr. [11], n.24) que

$$q_{d-h} + q_{d-h+1} = \sigma^h[K], \quad (h=1, 2, \dots, d-1).$$

Dans le cas où  $V_d$  est non singulière, l'entier  $\sigma^h[K]$  est égal au nombre  $g_{d-h}$  des formes différentielles du degré  $d-h$ , linéairement indépendantes, qui sont attachées à la variété  $V_d$  (cfr. Hodge [6]); on peut aussi améliorer la présentation géométrique des irrégularités en supprimant, par exemple, les restrictions sur les ordres des hypersurfaces  $E_{m_1}, \dots, E_{m_h}$  que l'on a employées dans la définition de  $q_{d-h}$ .

2°/ Introduisons maintenant le diviseur  $Z$ , zéro de l'équivalence linéaire sur  $V_d$ . Nous disons que  $V_d$  est régulière d'index 1, si

$$\sigma^1[Z] = 0.$$

On prouve que  $q_2 = 0 \implies \sigma^1[Z] = 0$ . Pour  $d = 2$  on démontre aussi que  $\sigma^1[Z] = 0 \implies q_2 = 0$ .

(La double implication  $\sigma^1[Z] = 0 \iff q_2 = 0$  est certainement vraie même pour  $d > 2$ , lorsque  $V_d$  est non singulière).

Considérons la sous-variété de  $V_d$ ,

$$V_{d-h} = V_d \cap S_{r-h},$$

où  $S_{r-h}$  est un sous-espace générique de dimension  $r-h$  de l'espace ambiant  $S_r$ .

Indiquons par  $Z \cdot V_{d-h}$  le zéro de l'équivalence linéaire sur  $V_{d-h}$  et -pour rendre homogènes les notations- indiquons par  $Z \cdot V_d$  le zéro  $Z$  de  $V_d$ . Nous disons qu'une variété normale  $V_d$  (de dimension  $d > 2$ ) est régulière d'index  $h$  ( $1 < h \leq d-1$ ), si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
 & \sigma^1[Z \cdot V_{d-h+1}] = 0 \\
 & \sigma^1[Z \cdot V_{d-h+2}] = \sigma^2[Z \cdot V_{d-h+2}] = 0 \\
 (1) \quad & \sigma^1[Z \cdot V_{d-h+3}] = \sigma^2[Z \cdot V_{d-h+3}] = \sigma^3[Z \cdot V_{d-h+3}] = 0 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \sigma^1[Z \cdot V_{d-1}] = \sigma^2[Z \cdot V_{d-1}] = \dots = \sigma^{h-1}[Z \cdot V_{d-1}] = 0 \\
 & \sigma^1[Z \cdot V_d] = \sigma^2[Z \cdot V_d] = \dots = \sigma^{h-1}[Z \cdot V_d] = \sigma^h[Z \cdot V_d] = 0
 \end{aligned}$$

(Pour  $h = 1$  on trouve encore la définition de variété régulière d'index 1). Dans le cas où  $V_d$  est non singulière les conditions (1) sont surabondantes. Il suffit de supposer que soient satisfaites les conditions de la dernière ligne :

$$(2) \quad \sigma^1[Z] = \sigma^2[Z] = \dots = \sigma^h[Z] = 0,$$

qui sont équivalentes aux conditions

$$q_2 = q_3 = \dots = q_h = q_{h+1} = 0,$$

c'est-à-dire  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_h = 0$  ;

en outre, comme  $\sigma^s[D] = \dim H^s[V_d, \Omega^0(D)]$ , (où  $H^s[V_d, \Omega^0(D)]$  est le s<sup>me</sup> groupe de cohomologie de  $V_d$  à coefficients dans le faisceau des germes des fonctions méromorphes qui sont multiples du diviseur  $-D$  ; cfr. Hodge [6]), on peut donner aux conditions (2) la forme cohomologique

$$(3) \quad \dim H^1[V_d, \Omega^0(Z)] \dots = \dim H^h[V_d, \Omega^0(Z)] = 0.$$

Je ne sais pas si l'on peut réduire les conditions (1) même dans le cas d'une  $V_d$  singulière.

On vérifie que, si une variété normale  $V_d$  (singulière ou non) de dimension  $d > 2$  est régulière d'index  $h > 1$ , alors la sous-variété  $E_m$  -section de  $V_d$  par une forme générique d'ordre  $m$  arbitraire- est régulière d'index  $h-1$ .

3°/ Une variété normale  $V_d$  qui soit régulière d'index  $h = d-1$  est dite complètement régulière; pour une telle variété on peut démontrer les propriétés suivantes :

- I) Les irrégularités  $q_2, q_3, \dots, q_{d-1}, q_d$  de  $V_d$  sont nulles.
- II) On a  $P_a(V_d) = p_a(V_d)$ , où  $p_a(V_d)$  est le genre arithmétique virtuel de  $V_d$  (c'est-à-dire  $p_a(V_d) = (-1)^d \{ \chi(V_d, 0) - 1 \}$ , ayant indiqué par  $\chi(V_d, \ell)$  le polynôme caractéristique de Hilbert attaché à  $V_d$ ).
- III) Pour  $h = 1, 2, \dots, d-1$ , et pour tout entier  $\ell \geq 0$ , indiquée par  $E$  la section hyperplane générique de  $V_d$ , on a

$$\sigma^h[K + \ell E] = 0$$

- IV) Pour  $h = 1, 2, \dots, d-1$ , et pour tout entier relatif  $\ell$ , on a

$$\sigma^h[K - \ell E] = \sigma^{d-h}[\ell E] \quad (*)$$

Pour  $d > 2$  on peut ajouter que la sous-variété  $E_m$ , section d'une variété  $V_d$  complètement régulière par une hypersurface générique de l'espace ambiant  $S_r$ , est elle aussi complètement régulière; en particulier les sous-variétés  $V_{d-1}, V_{d-2}, \dots, V_2$ , sections respectives de  $V_d$  par des sous-espaces génériques  $S_{r-1}, S_{r-2}, \dots, S_{r-d+2}$  sont complètement régulières.

---

(\*) Lorsque  $V_d$  est non singulière, les propriétés II, III, IV sont bien connues et sont valables même si  $V_d$  n'est pas complètement régulière; en plus la propriété III est généralisée par le "théorème de régularité de l'adjoint à un système ample" (Kodaira-Spencer); et la propriété IV est valable aussi en remplaçant le diviseur  $E$  par un diviseur  $D$  quelconque (théorème de dualité de Serre-Hodge; cfr. [6]).

4°/ Les variétés régulières d'index  $h$  ont des liens très profonds avec les variétés qui sont  $(h+1)$  - fois de première espèce au sens de Dubreil. Soit  $W_d$  une variété pure (même réductible, mais dépourvue de composants multiples) appartenant à l'espace  $S_r$  ; soit  $W_{d-1}$  la section de  $W_d$  par un hyperplan générique  $S_{r-1}$ . La variété  $W_d$  est de première espèce si une hypersurface quelconque de  $S_{r-1}$  qui contient  $W_{d-1}$  est découpée sur  $S_{r-1}$  par une hypersurface de  $S_r$  contenant  $W_d$  (mais pas l'espace  $S_{r-1}$ ) (\*). On dit que  $W_d$  est  $(h+1)$  - fois de première espèce si  $W_d$  et ses sections par des sous-espaces génériques  $S_{r-1}, S_{r-2}, \dots, S_{r-h}$  sont des variétés de première espèce ; si  $W_d$  est  $d$ -fois de première espèce, on dit qu'elle est complètement de première espèce.

Nous avons démontré les propriétés suivantes.

Soit  $V_d$  une variété irréductible normale (singulière ou non) de dimension  $d \geq 2$ .

Si  $V_d$  est une variété  $(h+1)$  - fois de première espèce ( $1 \leq h < d$ ), elle est régulière d'index  $h$ .

La propriété réciproque n'est pas vraie, cependant si  $V_d$  est régulière d'index  $h$  on peut trouver une variété  $V_d^*$ , modèle birationnel birégulier de  $V_d$ , qui est  $(h+1)$  - fois de première espèce.

En particulier, si  $V_d$  est complètement de première espèce, elle est complètement régulière ; et si  $V_d$  est complètement régulière elle admet un modèle birationnel complètement de première espèce.

Ces résultats généralisent des propriétés que nous avons déjà étudiées en [9] lorsque  $V_d$  est non singulière, propriétés qui sont analogues à des théorèmes démontrés par Serre [15], Dubreil [2] dans un ordre d'idées tout à fait différent (cfr. aussi Gasapina [4]).

Considérons maintenant une variété irréductible normale  $V_d$  qui soit  $(h+1)$  - fois de première espèce ( $V_d$  est aussi  $(k+1)$  - fois de première espèce pour tout  $k < h$ ). Indiquons par  $H$  une sous-variété pure de  $V_d$ , ayant la codimension 1 ;  $H$  pourra être supposée même réductible, mais sans composants multiples.

En utilisant des résultats que nous avons établi en [12], on peut démontrer que  $H$  est une variété  $h$ -fois de première espèce au sens de Dubreil si, et seule-

---

(\*) Si  $W_d$  est une variété irréductible normale, la propriété qu'elle soit de première espèce est équivalente à la propriété qu'elle soit arithmétiquement normale ; cela signifie que la totalité des hypersurfaces d'ordre  $l$  de l'espace ambiant découpe sur  $W_d$  un système linéaire complet pour tout  $l = 1, 2, 3, \dots$

ment si, pour tout entier relatif  $\ell$  on a (sur  $V_d$ ) :

$$(4) \quad \sigma^1[\ell E-H] = \sigma^2[\ell E-H] = \dots = \sigma^h[\ell E-H] = 0 .$$

Donc, les conditions pour que  $H$  soit  $h$ -fois de première espèce semblent en nombre infini, mais en fait, on peut remplacer les (4) par un nombre fini de conditions numériques essentielles.

5°/ Une variété irréductible  $V_d$  ( $d \geq 2$ ) normale de première espèce, est complètement de première espèce si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites ([12], Cor. 36) :

I)  $V_d$  est complètement régulière.

II) Pour tout entier  $\ell > 0$  on a

$$\sigma^1[\ell E] = \sigma^2[\ell E] = \dots = \sigma^{d-1}[\ell E] = 0 .$$

En s'appuyant sur ce critère et sur un théorème de G. Gherardelli [5] sur les courbes intersections complètes de deux surfaces de l'espace  $S_3$ , on peut démontrer qu'une variété irréductible normale  $V_d$ , (même singulière,  $d > 1$ ), est l'intersection complète de deux hypersurfaces d'un espace  $S_{d+2}$  de dimension  $r = d+2$  si, et seulement si :

I)  $V_d$  est une variété de première espèce.

II)  $V_d$  est une variété sous-canonique, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif  $\nu$  tel que le diviseur  $\nu E$  est linéairement équivalent à un diviseur canonique  $K$  de  $V_d$ .

III)  $V_d$  est complètement régulière.

IV) Dans le cas  $\nu > 0$ , on a  $\sigma^h[\ell E] = 0$  pour  $h = 1, 2, \dots, d-1$ ;  $0 < \ell < \nu$ .

Un théorème analogue sur les  $V_d$  non singulières intersections complètes a été donné par Gasapina [4] ; une proposition plus fine a été établie par Serre (cfr. [16], p. 14 ; Serre retrouve aussi, à la page 15, le théorème de Gherardelli).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUBREIL (Paul). - Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne. Actual. Scient. et Industr." Hermann Paris (1935).
- [2] DUBREIL (Paul). - Idéaux de polynômes et fonction de Hilbert. Rend. Sem. Matem. Univ. e Politecnico Torino, 20, 1960-1961.
- [3] GASAPINA (U.). - Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari, (Nota II), Boll. Un. Matem. Ital., 16, 1961.
- [4] GASAPINA (U.). - Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica normale, Atti Accad. Scienze Torino, 100, 1965-1966.
- [5] GHERARDELLI (G.). - Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie, Atti della R. Accademia d'Italia, vol. IV, fasc. 6, 1942.
- [6] HODGE (W.V.D.). - A note on theorem of Riemann-Roch, Journal London Math. Soc. 30, 1954.
- [7] KODAIRA (K.), SPENCER (D.C.). - Divisors class groups on algebraic varieties. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 39, 1953.
- [8] KODAIRA (K.), SPENCER (D.C.). - On arithmetic genera of algebraic varieties. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 39, 1953.
- [9] MARCHIONNA (Ermanno). - Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica non singolare. Annali di Matematica (IV), Tome LIV, 1961.
- [10] MARCHIONNA (Ermanno). - Sui multipli dei sistemi lineari d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica pluriregolare. Rend. di Matematica, Roma, 21, 1962.
- [11] MARCHIONNA (Ermanno). - Sulla dimensione virtuale ed effettiva di un sistema lineare d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica normale. Rend. di Matematica, Roma, 25, 1966.
- [12] MARCHIONNA (Ermanno). - Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica. Symposia Mathematica, Ist. Naz. Alta Matem. Roma, Academic Press London New-York, vol. V, 1971.
- [13] MARCHIONNA (Ermanno). - Sulle varietà completamente regolari, Annali di Matem. (volume in onore del prof. B. Segre) ; à paraître.
- [14] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie en géométrie algébrique. Proc. Int. Congress of Mathem., Amsterdam, III, 1954.
- [15] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents. Annals of Mathem. 61, 1955.
- [16] SERRE (Jean-Pierre). - Sur les modules projectifs. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres) 14<sup>e</sup> année, 1960-1961, n° 2.

(Texte reçu le 5/2/1973)

Università di Milano  
Istituto Matematico  
"Federigo Enriques"  
Via C. Saldini, 50  
MILANO (Italia)