MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A.W. KOHEN

Sur la transformation de Fourier p-adique

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 123-130
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__123_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 39-40, 1974, p. 123-130

SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER p-adique

A.W. KOHEN

Soit G un groupe abélien localement compact, de dimension zéro et de torsion, K un corps valué non-archimédien complet de caractéristique zéro, T_K le groupe multiplicatif des éléments de K de valeur absolue 1, $\hat{G} = (G, T_K)$ le dual de G au sens de la théorie des groupes abéliens localement compacts. On supposera que G admet un sous-groupe ouvert compact H dont le dual $H^\wedge$ est constitué par des homomorphismes à noyau ouvert et sépare les points de H .

Dans [2] Schikhof à montré que s'il existe une mesure de Haar à valeurs dans K sur G et sur $\hat{G}$ alors la transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces de Banach de $L^1(G,K)$ sur $\mathcal{C}_\infty(\hat{G},K)$. Dans ce travail, sans supposer que $\hat{G}$ admette une mesure à valeurs dans K, nous montrerons que la transformation de Fourier est toujours injective et nous établirons quelques propriétés de synthèse dans $L^1(G,K)$.

1. Sous-algèbres régulières de $\mathcal{C}_\infty(X,K)$.

Soit X un espace localement compact de dimension zéro, A, $\|\cdot\|_A$ une algèbre de Banach contenue dans $\mathcal{C}_\infty(X,K)$. Dans ce paragraphe, nous supposons que A contient tous les idempotents de $\mathcal{C}_\infty(X,K)$.

Proposition 1 :

A est une algèbre régulière d'espace de structure X.

Preuve : le premier point est clair en raison de l'hypothèse sur A. Soit $\bar{A}$ le complété de A pour la norme :

$\|\varphi\|_s = \sup_{h \in m(A)} |h(\varphi)|$ où m(A) est l'ensemble des homomorphismes de A dans K ; $\bar{A}$ contient les idempotents de $\mathcal{C}_\infty(X,K)$ et pour tout idempotent ε de $\mathcal{C}_\infty(X,K)$ on a

$\|\mathcal{E}\|_s = 1$. Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions localement constantes sur X, $\mathcal{K}$ est partout dense dans $\mathcal{C}_\infty(X,K)$ et pour toute $\varphi \in \mathcal{K}$ on a : $\|\varphi\|_s \leqslant \|\varphi\|_\infty$, or on a aussi $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_s$ pour toute $\varphi \in \mathcal{K}$; comme $\mathcal{K}$ est contenu dans A, on a : $\bar{A} = \mathcal{C}_\infty(X,K)$. Soit alors $h \in m(A)$ et $\varphi \in A$, $|h(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_s = \|\varphi\|_\infty$ donc h se prolonge à $\mathcal{C}_\infty(X,K)$; d'autre part toute évaluation $\tau_x : \varphi \longmapsto \varphi(x)$, $x \in X$ appartient à m(A) donc $m(A) \simeq X$.

<u>Proposition</u> 2 :

<u>Soient</u> E <u>un compact et</u> F <u>un fermé de</u> X <u>tels que</u> $E \cap F = \emptyset$ <u>alors</u> A <u>contient une fonction</u> φ <u>telle que</u> $\varphi(E) \subset \{1\}$ et $\varphi(F) \subset \{0\}$.

<u>Proposition</u> 3 :

<u>Soit</u> $\mathfrak{J}$ <u>un idéal de</u> A <u>et</u> φ <u>un élément de</u> A <u>appartenant localement à</u> $\mathfrak{J}$ <u>en tout point de</u> X <u>alors</u> φ <u>appartient à</u> $\mathfrak{J}$.

<u>Preuve</u> : on se ramène de façon évidente à X compact, $\mathfrak{J}$ est encore un idéal dans l'algèbre augmentée de l'unité. On peut alors trouver g_i, i = 1, 2,... n appartenant à $\mathfrak{J}$ et W_i , i = 1, 2,... n des ouverts compacts tels que $\varphi = g$ sur W_i, i = 1, 2,..n et $X = \bigcup_1^n W_i$. En posant $V_1 = W_1$ et $V_i = \left(\complement \bigcup_1^{i-1} V_i\right) \cap \left(\complement \bigcup_{i+1}^{n} W_j\right)$ pour $i \geqslant 2$, on obtient des ouverts compacts vérifiant : $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_1^n V_i = X$ et $\varphi = g_i$ sur V_i ,i = 1, 2,... n. Soit ε_i la fonction caractéristique de V_i ; on a

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi\varepsilon_i \quad \text{et} \quad \varphi\varepsilon_i = g_i \in \mathfrak{J}, \quad i = 1, 2,\ldots n, \text{ donc } \varphi \in \mathfrak{J} .$$

2. <u>Injectivité de la transformation de Fourier</u>.

<u>Proposition</u> 4 :

<u>Si</u> G <u>est compact et si</u> K <u>contient les racines</u> $[G:H]$ -ièmes <u>de l'unité pour tout sous-groupe ouvert compact</u> H <u>alors</u> $\hat{G}$ <u>sépare les points de</u> G.

<u>Preuve</u> : soit $x \in G$, $x \neq e$ (e : élément unité de G) ; il existe un sous-groupe ouvert compact H tel que $x \notin H$. Posons :

$$\varepsilon_H = \sum_{\gamma \in G/_H{}^\wedge} \frac{\gamma}{[G:H]}$$

et soit l'application canonique $\pi : G \longmapsto G/_H$; $\varepsilon_H \circ \pi$ est la fonction caractéristique de H donc $\varepsilon_H \circ \pi(x) = 0$; il existe un élément $\gamma \in G/H$ tel que $\gamma \circ \pi(x) \neq 1$ or $\gamma \circ \pi \in \hat{G}$ ce qui montre la proposition.

Rappelons que l'espace des classes de fonctions intégrables sur un groupe localement compact est en fait un espace de <u>fonctions</u> : c'est l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini avec la norme de la convergence uniforme à une constante près. Dans le cas d'un groupe compact G, $\hat{G}$ est discret [2] , alors :

$L^1(\hat{G},K) = \{\varphi : \hat{G} \longrightarrow K \text{ , } \lim \varphi(\gamma) = 0\}$ et la transformée de Fourier d'un élément $\varphi \in L^1(\hat{G},K)$ est : $\varphi^\wedge(x) = \sum_{\hat{G}} \varphi(\gamma)\,\gamma(x)$.

Dans le théorème suivant, nous allons donner l'analogue de la formule d'inversion pour un groupe compact G sans mesure de Haâr à valeur dans K. Posons :

$L^1_o(\hat{G},K) = \{\varphi : \hat{G} \longrightarrow K \text{ , } \lim \varphi(\gamma)\,\mathrm{ord}(\gamma)^{-1} = 0\}$; $L^1_o(\hat{G},K)$ est une sous-algèbre de $L^1(\hat{G},K)$ et on a :

<u>Théorème</u> 1 :

<u>Soit</u> $\varphi \in L^1_o(\hat{G},K)$, <u>alors</u> :

$$\varphi(\gamma) = \lim_H \frac{1}{[G:H]} \sum_0^{[G:H]-1} \hat{\varphi}(x_i)\,\gamma^{-1}(x_i) \qquad \gamma \in \hat{G}$$

<u>où</u> $\{x_i\}$ $i = 0, 1, \ldots, [G:H]-1$, <u>est un système de représentants de</u> G <u>mod</u>. H <u>et</u> H <u>parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de</u> G.

<u>Preuve</u> : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-groupe ouvert compact de G tel que $|\varphi(\gamma)\,\mathrm{ord}(\gamma)^{-1}| < \varepsilon$ pour tout $\gamma \notin H^\perp$; or pour $\gamma \notin H^\perp$ on a : $|\mathrm{ord}(\gamma)| \leq |[G:H]|$,

donc $|\varphi(\gamma)| < \varepsilon |[G:H]|$ pour tout $\gamma \notin H^\perp$. Soit d'autre part $\gamma \in \hat{G}$, H un sous-groupe ouvert compact de G tel que $\gamma \in H^\perp$, alors pour tout sous-groupe ouvert compact de G , $U \subset H$ on a :

$$\frac{1}{[G:U]}\sum_{0}^{[G:U]-1}\hat{\varphi}(x_i)\gamma^{-1}(x_i) = \frac{1}{[G:U]}\sum_{0}^{[G:U]-1}\Big(\sum_{\hat{G}}\varphi(\omega)\omega(x_i)\Big)\gamma^{-1}(x_i)$$

$$= \frac{1}{[G:U]}\sum_{0}^{[G:U]-1}\Big(\sum_{\omega\in U^{\perp}}\varphi(\omega)\omega(x_i)\Big)\gamma^{-1}(x_i) + \frac{1}{[G:U]}\sum_{\omega\notin U^{\perp}}\varphi(\omega)\sum_{i=0}^{[G:U]-1}\omega(x_i)\gamma^{-1}(x_i)$$

$$= \varphi(\gamma) + \frac{1}{[G:U]}\sum_{\omega\notin U^{\perp}}\varphi(\omega)\sum_{i=0}^{[G:U]-1}\omega(x_i)\gamma^{-1}(x_i) \text{ , par suite :}$$

$$\left|\frac{1}{[G:U]}\sum_{0}^{[G:U]-1}\hat{\varphi}(x_i)\gamma^{-1}(x_i) - \varphi(\gamma)\right| = \left|\sum_{\omega\notin U^{\perp}}\frac{\varphi(\omega)}{[G:U]}\sum_{i=0}^{[G:U]-1}\omega(x_i)\gamma^{-1}(x_i)\right| < \varepsilon$$

et ceci pour tout sous-groupe ouvert compact $U \subset H$ d'où le théorème.

<u>Théorème</u> 2 :

<u>La transformation de Fourier est injective sur</u> $L^1(G,K)$.

<u>Preuve</u> :

a) G <u>est compact</u> :

Dans ce cas, $\hat{G}$ est discret donc admet une mesure de Haâr à valeurs dans K. On sait, alors, que la transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces de Banach de $L^1(G,K)$ sur $\mathcal{C}_\infty(\hat{G},K)$ [2].

b) G <u>est discret</u> :

$\hat{G}$ est alors compact. Soit $\varphi \in \mathcal{L}^1(G,K)$ telle que $\hat{\varphi}(x) = 0$ pour tout $x \in \hat{G}$. Nous voulons montrer que $\varphi = 0$. Soit h un élément de $L^1_0(G,K)$; alors pour tout sous-groupe ouvert compact H de $\hat{G}$ et pour tout système de représentants $\{x_i\}$ de $\hat{G}$ mod. H, on a :

$$\sum_G \varphi(\gamma\omega^{-1}) \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i)\omega^{-1}(x_i) = \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i)\hat{\varphi}(x_i)\gamma(x_i) = 0 \text{ , d'où :}$$

$$|\varphi * h(\gamma)| = |\sum_G \varphi(\gamma\omega^{-1})h(\omega)| = |\sum_G \varphi(\gamma\omega^{-1})[h(\omega) - \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i)\,\omega^{-1}(x_i)|$$

$$\leq \|\varphi\| \sup_\omega |\ h(\omega) - \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{i=0}^{[\hat{G}:H]-1} \hat{h}(x_i)\,\omega^{-1}(x_i)| \ .$$

D'après le théorème 1, le terme de droite tend vers 0, donc $\varphi * h(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in G$, ce qui n'est possible que si $\varphi = 0$.

c) G <u>est non discret, non compact</u> :

Dans $L^1(G,K)$ la norme est donnée par :

$$(1) \qquad \|\varphi\| = \sup_\Omega \left| \int_G \varphi(g)\,\mathcal{E}_\Omega(g)\ m(g) \right|$$

où m est la mesure de Haâr sur G à valeur dans K, et où Ω parcourt l'ensemble des ouverts compacts de G [2] ; or tout ouvert compact Ω est réunion disjointe d'ouverts compacts de la forme aH où H est un sous-groupe ouvert compact de G et $a \in G$. La norme (1) peut alors s'écrire :

$$(1') \qquad \|\varphi\| = \sup_{H,a} \left| \int_G \varphi(g)\ \mathcal{E}_{aH}(g)\ m(g) \right|$$

où H parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G et $a \in G$.

Soit $\varphi \in L^1(G,K)$; si $\varphi \neq 0$, d'après la norme (1'), il existe $a \in G$ et H sous-groupe ouvert compact de G tels que $\varphi^H(a) = \int \varphi(g)\ \mathcal{E}_{a^{-1}H}(g)\ m(g) =$ $= \int \varphi(ag)\ m(g) \neq 0$; φ^H peut être considérée comme un fonction sur G/H. Soit $\alpha \in H^\perp$,

$$\hat{\varphi}(\alpha) = \int \varphi(g)\alpha(g)\ m(g) = \sum_{G/H} \alpha(a) \int_H \varphi(ah)\ m(h) = \sum_{G/H} \alpha(a)\varphi^H(a) \ ; \text{ or}$$

$H^{\perp} \simeq G/_{H}^{\wedge}$ et $\varphi^{H} \neq 0$, il existe alors $\alpha \in G/_{H}$ tel que $\varphi^{H^{\wedge}}(\alpha) \neq 0$ (cf. b)). Posons $\beta = \alpha \circ \pi$ où π est l'application canonique de G sur $G/_{H}$; β est un élément de $\hat{G}$ et $\hat{\varphi}(\beta) = \varphi^{H^{\wedge}}(\alpha) \neq 0$.

3. <u>L'algèbre</u> $A(\hat{G},K)$.

L'injectivité de la transformation de Fourier nous permet de munir $A(\hat{G},K) = L^{1}(G,K)^{\wedge}$ de la norme $\|\hat{\varphi}\|_{A} = \|\varphi\|$. $A(\hat{G},K)$ est alors isomorphe et isométrique à $L^{1}(G,K)$.

<u>Proposition</u> 5 :

$A(\hat{G},K)$ <u>contient tous les idempotents de</u> $\mathcal{C}_{\infty}(\hat{G},K)$.

<u>Preuve</u> : cf. [2].

La proposition 5 montre que $A(\hat{G},K)$ vérifie la condition du paragraphe 1 ; $A(\hat{G},K)$ est une algèbre régulière d'espace de structure $\hat{G}$. Pour de telles algèbres on a le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 6 : <u>L'ensemble vide est un ensemble de synthèse</u>.

<u>Proposition</u> 7 :

<u>S'il n'existe pas de mesure de Haâr à valeurs dans K sur</u> $\hat{G}$ <u>alors</u> $A(\hat{G},K) \subsetneq \mathcal{C}_{\infty}(\hat{G},K)$.

<u>Preuve</u> : supposons $\hat{G}$ compact et soit H un sous-groupe ouvert compact de $\hat{G}$; la fonction caractéristique de H est $\varepsilon_{H} = \frac{1}{[\hat{G}:H]} \sum_{\gamma \in H^{\perp}} \gamma$. On a : $\|\varepsilon_{H}\|_{A} = \frac{1}{|[G:H]|}$ donc $\lim_{H} \|\varepsilon_{H}\|_{A} = \infty$ et $\|\varepsilon_{H}\|_{\infty} = 1$; or $A(\hat{G},K)$ est dense dans $\mathcal{C}_{\infty}(\hat{G},K)$ donc en raison du théorème de Banach on ne peut avoir $A(\hat{G},K) = \mathcal{C}(\hat{G},K)$.

Pour $\hat{G}$ non compact et H un sous-groupe ouvert compact de $\hat{G}$ on a : $A(H,K) \neq \mathcal{C}(H,K)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(H,K)$ avec $\varphi \notin A(H,K)$ et soit $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour $x \in H$ et $\tilde{\varphi}(x) = 0$ pour $x \notin H$; $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_{\infty}(\hat{G},K)$ et $\tilde{\varphi} \notin A(\hat{G},K)$ en raison du lemme suivant :

Lemme:

L'application $\hat{\varphi} \longrightarrow \hat{\varphi}_{|H}$ *est surjective de* $A(\hat{G},K)$ *sur* $A(H,K)$.

En effet on a : $\hat{\varphi}_{|H} = (\varphi^{H^{\perp}})^{\wedge}$ où $\varphi^{H^{\perp}}(x) = \int_{H^{\perp}} \varphi(xh)\, m(h)$ et l'application $\varphi \longmapsto \varphi^{H^{\perp}}$ de $L^1(G,K)$ dans $L^1(G/_{H^{\perp}},K)$ est surjective [2].

Nous terminons par un résultat qui souligne d'une autre façon la différence entre le cas où il existe une mesure de Haâr à valeurs dans K sur G et le cas où cette mesure n'existe pas.

Théorème 3 :

On suppose $\hat{G}$ *compact et soit* μ *une mesure sur* G *à valeurs dans* K.

1) *S'il existe une mesure de Haâr* $\hat{m}$ *sur* $\hat{G}$ *à valeurs dans* K *et si* $\mu = \varphi \hat{m}$ *avec* $\varphi \in \mathcal{C}(\hat{G},K)$ *alors l'opérateur* $T_\mu f = \varphi * f$ *est complétement continu dans* $\mathcal{C}(\hat{G},K)$.

2) *S'il n'existe pas de mesure de Haâr à valeurs dans* K *sur* $\hat{G}$ *alors* $T_\mu f = \mu * f$ *n'est complètement continu dans* $\mathcal{C}(\hat{G},K)$ *que pour* $\mu = 0$.

Preuve :

1) est une conséquence immédiate du théorème 5.2.10 de [2]. Montrons 2) :

$\hat{G}$ est compact, par suite $\mathcal{C}(\hat{G},K)$ est du type c(I) [1]; on peut donc appliquer la théorie de Riez démontrée par Serre[3] dans le cas p-adique.

Soit T un opérateur complètement continu dans $\mathcal{C}(\hat{G},K)$, alors pour tout $\lambda \in K$ on a : $\mathcal{C}(\hat{G},K) = N(\lambda) \oplus F(\lambda)$ où la somme est topologique, $N(\lambda)$ et $F(\lambda)$ stables par T, $N(\lambda)$ de dimension finie et $I - \lambda T$ inversible dans $F(\lambda)$. De plus la projection P_λ sur $N(\lambda)$ associée à la décomposition précédente est un polynôme de T.

Supposons maintenant T_μ complètement continu; pour tout $\lambda \in K$ la projection P_λ associée est une mesure sur $\hat{G}$ et est de rang fini en tant qu'opérateur dans $\mathcal{C}(\hat{G},K)$. Supposons qu'on ait déjà montré que $P_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in K$, alors $I - \lambda T_\mu$ est inversible dans $\mathcal{C}(\hat{G},K)$ pour tout $\lambda \in K$, ce qui n'est possible que si $\mu = 0$.

Le lemme suivant terminera la démonstration.

Lemme :

$P_\lambda = 0$ *pour tout* $\lambda \in K$.

Preuve : soit P une projection dans $\mathcal{C}(\hat{G},K)$, l'application $\nu : \varphi \longmapsto P_\varphi(\hat{e})$ est une mesure idempotente sur $\hat{G}$. Pour $\hat{\varphi} = \sum_G \varphi(\gamma)\gamma$ on a : $P_{\hat{\varphi}}(\hat{e}) = \varphi(\gamma)\alpha_\gamma$ où

$\alpha_\gamma = 0,1$ car ν est une mesure idempotente. Supposons P de rang fini et soit n le nombre des $\gamma \in G$ tel que $\alpha_\gamma = 1$; pour un sous-groupe ouvert compact H suffisamment petit on a : $P_{\varepsilon_H}(\hat{e}) = \frac{n}{[\hat{G}:H]}$, or $\lim_H \frac{1}{[\hat{G}:H]} = \infty$ donc P ne peut être borné dans $\mathcal{C}(\hat{G},K)$ si $P \neq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] van der PUT, M. Algèbres de fonctions continues p-adiques. Indagationes Math. 30, 4, 401-420, 1968.

[2] Schikhof, W.H. Nom Archimedean Harmonic Analysis. Thesis Nijmegen, 1967.

[3] Serre, J.P. Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach P-adiques. Publications Mathématiques I.H.E.S. n° 12, 1964.

A.W. KOHEN

Université de Rabat
Département de Mathématiques
MAROC