Elhanan Motzkin

Le point de vue complexiforme

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 279-286
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__279_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 39-40, 1974, p. 279-286

LE POINT DE VUE COMPLEXIFORME

E. MOTZKIN

Soit K un corps ultramétrique complet. Alors la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ (resp. $g(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n X^n$) converge pour $|x| = r$ si et seulement si $|a_n| r^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ (resp. quand $n \to \pm\infty$). On notera conv(f) (resp. conv(g)) l'ensemble des r tels que $\lim a_n r^n = 0$. Cet ensemble est un intervalle. Nous allons étudier les propriétés des fonctions sommes de série de Taylor ou de Laurent, qu'on appellera fonctions analytiques.

1. Les inégalités de Cauchy.

Théorème 1. i) Si la valuation de K est dense dans $\mathbb{R}^+$ ou si le corps de restes est infini, on a pour r appartenant au groupe des valeurs,

1) $$\sup_{|x|=r} |f(x)| = \sup_n |a_n| r^n \; ; \quad \sup_{|x|=r} |g(x)| = \sup_n |a_n| r^n$$

2) $$\sup_{|x|\leq r} |f(x)| = \sup_n |a_n| r^n \; ; \quad \sup_{\rho\leq|x|\leq r} |g(x)| = \max(\sup_n |a_n| \rho^n \, , \, \sup_n |a_n| r^n)$$

ii) Si la valuation est dense

3) $$\sup_{|x|<r} |f(x)| = \sup_n |a_n| r^n \; ; \quad \sup_{\rho<|x|<r} |g(x)| = \max(\sup_n |a_n| \rho^n \, , \, \sup_n |a_n| r^n)$$

Remarques :

1. Comme K est complet on a

K localement compact $\Longleftrightarrow$ la valuation est discrète et le corps des restes est fini.

L'hypothèse dans i) peut donc s'exprimer en disant que K n'est pas localement compact.

2. Si les hypothèses sont en défaut, le théorème est faux.

Contre-exemples :

i) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des représentants du corps de restes (lequel est fini). Considérons la fonction $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.

On a $a_n = 1$ et $|a_n| \leq 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Alors si $|x| \leq 1$, il existe un i tel que $|x-\alpha_i| < 1$. Comme la valuation est discrète $|x-\alpha_i| \leq \delta < 1$. On a donc $|f(x)| \leq \delta$ et par conséquent

$$\sup_{|x|=r} |f(x)| \leq \sup_{|x|\leq r} |f(x)| \leq \delta < 1 = \sup_k a_k$$

ii) Prenons $f(x) = x$, alors $\sup_{|x|<1} |f(x)| = \delta < 1$.

Nous supposerons désormais que K n'est pas localement compact.

Corollaire 1. (théorème de Liouville). Si f(x) est entière et bornée, f est constante. Si f est entière et $\frac{|f(x)|}{|+|x||^k}$ est bornée, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

Corollaire 2. Si les fonctions f_n sont développables en série de Laurent dans la couronne Δ : $\rho \leq |x| \leq r$ et convergent uniformément sur les cercles C_1 : $|x| = \rho$ et C_2 : $|x| = r$ alors les f_n convergent uniformément sur Δ vers une fonction f développable en série de Laurent dans Δ .

2. Le principe du maximum.

Il résulte trivialement du théorème 1 que si K n'est pas localement compact et si r appartient au groupe des valeurs alors

$$\sup_{|x| \leq r} |f(x)| = \sup_{|x| = r} |f(x)| .$$

Nous allons préciser ces résultats et étudier si le maximum est effectivement atteint sur le cercle $|x| = r$.

Théorème 2.

i) Si le corps des restes est infini et si r appartient au groupe des valeurs, il existe $x \in C(0,r)$ (c'est-à-dire $|x| = r$) tel que $|f(x)| = \sup_{|y|=r} |f(y)|$

ii) Si la valuation est dense et si le maximum de $|f|$ dans $D(0,r^-)$ (c'est-à-dire $|x| < r$) est atteint en un point de $D(0,r^-)$ (c'est-à-dire $\exists x$, $|x| < r$ et $|f(x)| = \sup_{|y|<r} |f(y)|$), alors $|f|$ est constant dans $D(0,r^-)$.

iii) Si K n'est pas localement compact et si le maximum de $|f|$ dans $D(0,r^+)$ est atteint en un point de $D(0,r^-)$, alors $|f|$ est constant dans $D(0,r^-)$.

Remarque : Contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, $|f|$ peut-être constante dans un disque sans que f soit constante. D'ailleurs $|f|$ est constante au voisinage de tout point ou f n'est pas nulle.

3. Les polygones de valuation et de Newton.

On suppose que K n'est pas localement compact. On introduit la fonction $M(f,r) = \sup_{|x|=r} |f(r)|$, définie pour r appartenant au groupe des valeurs, et on pose

$\omega(f,\mu) = \mathrm{Log}(M(f,r))$ pour $\mu = \mathrm{Log}\, r$.

Théorème 3. (de Hadamard) La fonction $\omega(f,\mu)$ est convexe.

Démonstration. D'après le théorème 1, $\omega(f,\mu) = \sup_n(\mathrm{Log}\,|a_n| + n\,\mu)$. C'est donc une fonction convexe, puisque c'est l'enveloppe supérieure de fonctions affines.

Remarque. La fonction $\sup_n(\mathrm{Log}\,|a_n| + n\,\mu)$ à l'avantage d'être définie pour tout μ réel dans Log(conv(f)) et pas seulement pour $\mu = \mathrm{Log}\, r$ avec r appartenant au groupe des valeurs. Le graphe de cette fonction est un polygone convexe appelé polygone de valuation. C'est le polygone dual du polygone de Newton défini comme suit :

Le polygone de Newton est la frontière de l'ensemble convexe engendré par les points $(n, -\mathrm{Log}\,|a_n|)$. Les sommets du polygone de Newton correspondent par dualité aux côtés du polygone de valuation et réciproquement.

Autres propriétés du polygone de valuation :

Proposition 1 : i) Pour $\mu \in \mathrm{Conv}(f) \cap \mathrm{Conv}(g)$

$$\omega(f+g,\mu) \leqslant \max(\omega(f,\mu), \omega(g,\mu)),$$

l'égalité étant réalisée si $\omega(f,\mu) \neq \omega(g,\mu)$.

ii) Pour $\mu \in \mathrm{Conv}(f) \cap \mathrm{Conv}(g)$

$$\mu(fg,\mu) = \omega(f,\mu)\ \omega(g,\mu).$$

(Note : il faut d'abord remarquer que fg est bien défini et que $\mathrm{conv}(f) \cap \mathrm{conv}(g) \subset \mathrm{conv}(fg)$.).

4. Les zéros d'une fonction analytique.

Le plygone de valuation renseigne sur les zéros de la fonction f.

On considérera désormais des séries de Laurent.

Théorème 4. (Lemme de Hensel). Soit f une série de Laurent, $r \in \mathrm{Conv}(f)$, p le changement de pente du polygone de valuation au point

Log r $(p = \omega'(f, \mu+0) - \omega'(f(\mu - 0)$ avec $\mu = (\mathrm{Log}\, r))$. Il existe un unique polynôme unitaire de degré p, $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + x^p$, avec $|c_k| \, r^k \leqslant r^p = |c_0|$, et une série de Laurent g, avec $\mathrm{conv}(f) = \mathrm{conv}(g)$, tels que $f = Pg$.

Corollaire 3. Si K est algébriquement clos, f a exactement p zéros dans le cercle $C(0,r)$ qui sont les zéros de P.

Corollaire 4. (Théorème de Picard). Soit K algébriquement clos et f une série de Laurent ayant 0 comme point singulier essentiel (i.e. $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$, $\mathrm{Conv}\, f =]0,\rho)$, et $\forall N$ il existe $n < N$ tel que $a_n \neq 0$), alors quel que soit $r \in]0,\rho[$, l'image par f de la couronne $0 < |x| < r$ est K tout entier.

Corollaire 5. (Principe d'unicité). Soit f analytique telle que $[\rho,r] \subset \mathrm{conv}(f)$. S'il existe une infinité de points a_i, tels que $\rho \leqslant |a_i| \leqslant r$ et que $f(a_i) = 0$, alors f est identiquement nulle (i.e. tous ses coefficients sont nuls).

Corollaire 6. Soit f avec $\mathrm{conv}(f) \supset I$. Pour que $\frac{1}{f}$ soit développable en série de Laurent avec $\mathrm{conv}(\frac{1}{f}) \supset I$, il faut et il suffit que le polygone de valuation de f n'ait pas de changement de pente dans l'intervalle Log I.

Corollaire 7. Si K est algébriquement clos et si R est une fonction rationnelle sans pôle dans une couronne Δ, alors R est développable en série de Laurent dans la couronne Δ.

Le problème de Weierstrass.

Si $P(x) = c_o + c_1 x + \ldots + x^p$ avec $|c_o| = r^p$ et $|c_k| r^k \leqslant r^p$, $1 \leq k \leq p-1$

on dit que P est r-extrémal. D'après le lemme de Hensel, à une série de Laurent correspond la famille de ses diviseurs P_n qui sont des polynômes r_n-extrémaux, les seuls points d'accumulation des r_n étant les bornes de l'intervalle conv(f). Réciproquement, si on se donne une famille de polynômes P_n r_n-extrémaux avec

$\lim_{n \to -\infty} r_n = \rho$ et $\lim_{n \to -\infty} r_n = \rho'$, où conv(f) = $]\rho, \rho'[$, existe-t-il une série de Laurent f dont les diviseurs sont exactement les P_n ?

1. Si la valuation est discrète, la réponse est oui, et l'on a

$$(*) \qquad f = \prod_n P_n Q_n ,$$

le terme correctif Q_n étant par ailleurs un polynôme.

2. Si la valuation est dense et si K n'est pas maximalement complet, la réponse est, pas toujours. On peut construire une famille de polynômes r_n-extrémaux et montrer qu'ils ne sont la famille des diviseurs d'aucune série de Laurent.

On peut cependant toujours construire une série de Laurent f telle que chaque P_n divise f.

3. Si la valuation est dense et K est maximalement complet, la réponse est oui. La méthode de construction de f n'est pas explicite. Le problème se pose de savoir si l'on peut obtenir une formule de factorisation analogue à (*). Si f est une fonction entière, on peut obtenir une formule de factorisation. Sinon, on a le résultat négatif suivant (on suppose toujours que la valuation est dense dans $\mathbb{R}^+$) :

<u>Proposition</u> 2. <u>Soit</u> f <u>non nulle avec</u> conv(f) $\neq$ K. <u>Supposons que les diviseurs</u> P_n <u>de</u> f <u>soient en nombre infini et que</u> $\deg(P_n) \leq s$ <u>pour tout</u> n. <u>Alors il n'existe aucune factorisation de</u> f

$$f = \prod_{n \geqslant 1} f_n$$

<u>où les</u> f_n <u>sont tels que</u> $\mathrm{conv}(f_n) \supset \mathrm{conv}(f)$ <u>et chaque</u> f_n <u>n'a qu'un nombre fini de diviseurs dans</u> conv(f) (c-a-d r-extrémaux avec $r \in \mathrm{conv}(f)$), pour tout n).

BIBLIOGRAPHIE

[1] SRRASSMANN, R. Jber die Wertworrat von Potenzerihen im Gebiet der p-adischen Zahlen" J. Reine und angew. Math B 159 (1928), P.13. (Première apparition du polygone de valuation. Etude systématique des résultats en découlant pour les zéros et l'image d'une série de Taylor).

[2] SCHOBE, W. "Beitrage zur Funktionen theorie in nicht-archimediskh bewerteten Körper". Thèse, Münster 1930. (Exposition systématique des théorèmes élémentaires complexiformes en soulignant la différence entre les corps localement compacts et les corps algébriquement clos, ces derniers se prêtant mieux à une théorie complexiforme).

[3] SCHNIRELMANN, L.G. "Sur les fonctions dans les corps valués algébriquement clos". . Aca. Sci. URSS sér. Math. n°5-6 (1938) p. 23. (Introduction de l'intégrale de Schnirelmann) (en russe).

[4] LOONSTRA, F. "Analytische Untersuchungen über bewerteken Körper". Thèse Amsterdam 1941. (Reprise des résultats de Schöbe et traduction de l'article de Schnirelmann).

[5] KRASNER, M. "Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets". I,II,III,IV C.R. Aca. Sci V.222 (1946) p. 37, 165, 363, 581. (Premier essai de prolongement analytique. Divers théorèmes, dont Hadamard, Weierstrass, Picard et les zéros d'une série de Laurent déduits de son polygone de valuation).

[6] CHABAUTY, C. "Sur la théorie des fonctions dans un corps valué" C.R. Acad. Sci V.231 (1950) p. 396, 432.

[7] LENSKOY, D.N. "Sur les fonctions analytiques dans les corps valués" Mémoires S.G.U. (Math) t.70 p. 61 (en russe).

[8] LENSKOY, D.N. "Sur le comportement des fonctions analytiques dans les corps valués non-archimédiens". Izv. Vischikh Unebnikh Zavelenü, Math n°6 (1962) (en russe).

[9] LENSKOY, D.N. "Les fonctions dans les corps valués non-archimédiens". Université de Saratov 1962. (Exposé élémentaire) (en russe).

[10] LAZARD, M. "Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet" Publications IHES 1962 (Nécessité du complété maximal pour la solution du problème des zéros).

[11] MOTZKIN, E. "P-adic Domains of Analyticity" Thèse, Los Angeles 1968. (Première attaque sur le problème des types conformes).

[12] THALER, ALVIN, I. "On the Newton Polytope" Proc. Amer Math. Soc. 15 (1964) p. 944. (Résultats élémentaires sur le polygone de Newton en plusieurs variables).

E. MOTZKIN
24, Rue Berbier du Mets
75 013 - PARIS