Mémoires de la S. M. F.

JEAN-CLAUDE MITTEAU

Applications harmoniques stables

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 29-39
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__29_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 29 - 39.

APPLICATIONS HARMONIQUES STABLES

par Jean-Claude MITTEAU

I. INTRODUCTION.

(M,g) et (M',g') sont deux variétés riemanniennes (C^∞) connexes sans bord. A tout $f \in C^1(M,M')$ on associe son *énergie* $E(f)$ définie par

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |T_x f|^2 dv(x)$$

où v est la mesure canonique de volume (non orienté) de (M,g) (Tf est l'application tangente à f, considérée comme élément de $T^*M \otimes f^*TM'$. Pour tout élément L de $T^*M \otimes f^*TM'$, et tout point x de M, on définit $|L_x|$ par

$$|L_x|^2 = \sum_{i=1}^{\dim M} g'(L(e_i), L(e_i))$$

où $\{e_i\}_{i=1,\dots,\dim M}$ est une base orthonormée de T_xM). La recherche des extrémales de E conduit [3] à l'équation aux dérivées partielles

(1) $$\tau(f) = 0$$

et une application $f \in C^2(M,M')$ vérifiant (1) est dite *harmonique*.

L'opérateur $\tau : C^2(M,M') \to TC^\circ(M,M')$ est du second ordre, polynomial, à parties principales en forme de laplaciens. Il n'est pas linéaire, car, en introduisant la connexion canonique ∇_f dans l'espace $T^*M \otimes f^*TM'$, τ s'écrit

(2) $$\tau(f) = \mathrm{Tr}_g(\nabla_f Tf)$$

où $\mathrm{Tr}_g : T^*M \otimes T^*M \to \mathbb{R}$ est la trace prise relativement à la métrique g. Or la connexion ∇_f dépend de l'application f.

Nous donnons dans cet article quelques résultats concernant l'étude d'une application harmonique voisine d'une application harmonique donnée et celle de l'équation parabolique associée à (1)

(3) $$\frac{\partial f}{\partial t} = \tau(f_t)$$

toujours au voisinage d'une application harmonique donnée.

Ce travail a été conçu afin de tenter d'étudier les solutions de l'équation (1) dans le cas où aucune hypothèse n'est faite sur le signe de la courbure sectionnelle de (M',g'). Dans le cas où cette courbure est constamment non-positive, de nombreux résultats existent (voir en particulier [3], [4], [6]).

2. UN RESULTAT PARTIEL D'EXISTENCE.

On a montré [10] que le résultat général de [3] pouvait être étendu de la façon suivante

THEOREME 1. - *On suppose* M *compacte et* (M',g') *complète, ayant sa courbure sectionnelle bornée supérieurement par un réel* K *positif ou nul.*

Dans ces conditions il existe toujours un réel $\varepsilon(M,g) > 0$ *tel que si une application* $f_\circ \in C^1(M,M')$ *vérifie*

$$K.\ \sup_{x \in M} |T_x f_\circ|^2 \leqslant \varepsilon(M,g)$$

alors le problème de Cauchy

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \tau(f_t),\ \text{dans } M \times\ ]0,\infty) \\ f(x,0) = f_\circ(x),\ \forall x \in M, \\ f \in C^\infty(M \times\ ]0,\infty),\ M') \cap C^\circ(M \times [0,\infty),\ M') \end{array}\right.$$

admet une unique solution.

Si en outre cette solution vérifie la condition : "$f(M \times [0,\infty))$ *est un borné de* (M',g')", *il existe alors, pour tout entier* $k > 0$, *une suite non bornée de réels positifs* $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ *telle que les applications partielles* $\{f_{t_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ C^k-*convergent, pour* $n \to \infty$, *vers une application harmonique.*

Remarque 1. - Ce théorème prend en compte le cas des applications constantes.

Remarque 2. - On peut prouver facilement qu'il existe des applications non homotop pes à une constante dont l'existence est affirmée par ce théorème. Il suffit pour cela de considérer une application à valeurs dans un tore plat, puis de déformer celui-ci, ce qui introduira en général des points à courbure positive.

3. STABILITE.

Un premier résultat concerne les applications constantes.

THEOREME 2. - *On suppose* M *compacte. On peut alors trouver une constante* K(M) *telle que si la courbure sectionnelle de* (M',g') *est bornée supérieurement par* K(M) *on peut trouver un réel* $\varepsilon_1(M,M')$ *possédant la propriété suivante :*

"*si* $f_\circ \in C^1(M,M')$ *vérifie* $|T_x f_\circ|^2 \leqslant \varepsilon_1(M,M')$ *pour tout* x *dans* M*, alors le problème de Cauchy (4) admet une unique solution. Cette solution admet des valeurs d'adhérence dans la* C^k*-topologie qui sont nécessairement des constantes*".

Pour la démonstration, voir [10], théorème (5.12).

La suite de ce travail concerne l'étude des applications voisines de $f_\circ : M \to M'$, M étant compacte et $f_\circ$ harmonique. Les deux problèmes qu'on peut se poser sont les suivants :

a) Existe-t-il des applications harmoniques C°-voisines de $f_\circ$?

b) Quel est le comportement des solutions de l'équation (3) dans un C°-voisinage de $f_\circ$?

La méthode des variétés d'applications permet une étude assez complète de ces deux problèmes. On utilise pour cela la carte exponentielle centrée en $f_\circ$, donnée par une application locale

$$\mathrm{Exp}_{f_\circ} : T_{f_\circ} C^k(M,M') \to C^k(M,M')$$

définie par

$$\mathrm{Exp}_{f_\circ}(X)(x) = \exp_{f_\circ(x)} X(x)$$

l'exponentielle exp étant prise dans (M',g') et X étant un élément du Banach $T_{f_\circ} C^k(M,M')$, c'est-à-dire une C^k-section du fibré $f_\circ^*$-TM'.

Nous avons besoin d'écrire les opérateurs τ et $\frac{\partial}{\partial t} - \tau$ dans cette carte. On a prouvé pour cela dans [9] :

THEOREME 3. - *On suppose* M *compacte. Il existe alors un réel* $\alpha_k > 0$*, pour* $k \in \mathbb{N}$*, tel que tout opérateur différentiel d'ordre* k *opérant sur le* C^k*-voisinage de rayon* α_k *de* $f_\circ$ *dans* $C^k(M,M')$ *se relève dans la carte* $\mathrm{Exp}_{f_\circ}$ *en un opérateur local sur* $T_{f_\circ} C^k(M,M')$.

Dans le cas particulier des opérateurs qui nous intéressent, on obtient

$$(\mathrm{TExp}_{f_\circ})^{-1}(\tau(f)) = -\Delta_{f_\circ} X - \Phi(X,\nabla_{f_\circ} X)$$

et une formule analogue pour l'autre opérateur.

On voit dans cette formule que l'opérateur $\Delta_{f_\circ} : C^2(f^*TM') \to C^\circ(f^*TM')$ joue un rôle essentiel. Cet opérateur utilisé également dans [10], s'écrit

(5) $$\Delta_{f_\circ} X = -\mathrm{Tr}_g \nabla_{f_\circ}^{(2)} X + R(X)$$

où $\nabla_{f_\circ}$ est la connexion du fibré $f_\circ^*TM'$ image de la connexion riemannienne dans TM' et où R est la "courbure de Ricci" de la même :

$$R_x(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{f(x)} [d_x f(e_i), X]\, d_x f(e_i)$$

$\mathcal{R}$ étant la courbure de (M',g') et $\{e_i\}$ une base orthonormée de T_xM.

Etant donné les majorations que l'on peut obtenir sur Φ, on voit que $\Delta_{f_\circ} X$ représente $\tau(f)$ au premier ordre, si $\mathrm{Exp}_{f_\circ} X = f$. Les obstructions à une éventuelle stabilité asymptotique de l'équation (3) seront par suite fournies par les solutions de

(6) $$\Delta_{f_\circ} X = 0$$

que nous appelerons champs de vecteurs $f_\circ$-harmoniques. Nous étudierons au paragraphe 4 quelques cas particuliers dans lesquels l'opérateur $\Delta_{f_\circ}$ peut être étudié complètement.

Un résultat partiel concernant la stabilité asymptotique des solutions du problème (4) est donné ci-dessous. Nous donnerons dans un travail ultérieur certains développements que l'on peut faire dans le même cadre.

THEOREME 4. - *Soient* (M,g) *une variété riemannienne compacte sans bord,* (M',g') *une variété riemannienne sans bord. Considérons une application harmonique* $\varphi : M \to M'$. *On suppose l'opérateur* Δ_φ *strictement positif :*

$$< \Delta_\varphi X, X > > 0, \quad \forall X \in C^2(\varphi^*TM')$$

Il existe alors un C^1*-voisinage* ω *de* φ *tel que si le problème (4) admet une solution* f *dans* ω *:* $\quad f(x,t) \in \omega, \quad \forall x \in M, \quad \forall t \in [0, \infty)$,
cette solution vérifie nécessairement

$$\lim_{t\to\infty} f_t = \varphi.$$

Démonstration. - On utilise dans l'espace $L^2(\varphi^* TM')$ la norme L^2 déduite de la métrique dans M' et de l'élément de volume canonique de (M,g). Le produit scalaire $< .,. >$ est celui associé canoniquement à cette norme. On déduit des résultats de [11] la majoration

$$\|\Phi(X, \nabla X)\| \leqslant C\|X\|(\|X\| + \|\nabla X\|)$$

où $X = \mathrm{Exp}^{-1}(f)$, f étant solution de (4). On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|X\|^2 = < \nabla_t X, X >$$

par suite de la compatibilité de la connexion $\nabla = \nabla_\varphi$ dans $\varphi^* TM'$ avec la métrique. Par construction de Φ, on a

$$\nabla_t X + \Delta_\varphi X = \Phi(X, \nabla X).$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|X\|^2 = - < \Delta_\varphi X, X > + < \Phi(X, \nabla X), X >.$$

Δ_φ étant de type positif et M étant compacte, Δ_φ est coercif [1]. Par suite

$$< \Delta_\varphi X, X > > \alpha\|X\|^2, \quad \forall X \in C^2(\varphi^* TM')$$

α constante strictement positive. D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|X\|^2 \leqslant -\alpha\|X\|^2 + C\|X\|^2(\|X\| + \|\nabla X\|). \tag{7}$$

Si on suppose que f reste dans un C^1-voisinage de φ de rayon $\varepsilon > 0$, on a

$$\|X\| + \|\nabla X\| \leqslant \varepsilon.$$

En prenant ε assez petit, (7) donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|X\|^2 \leqslant -\varepsilon_1\|X\|^2$$

où ε_1 est un réel, $\varepsilon_1 > 0$. Ceci montre qu'on a nécessairement

$$\lim_{t \to \infty} \|X_t\| = 0. \tag{8}$$

Maintenant, f_t étant pour tout $t \in [0,\infty)$ dans un C^1-voisinage de φ la densité d'énergie $\frac{1}{2}|Tf(x)|^2$ est majorée par une certaine constante indépendante de t. On peut par conséquent appliquer les résultats de [10] : f est C^1-bornée, les conclusions du théorème 1 sont vérifiées par suite par l'application f. Soit alors

f_∞ une valeur d'adhérence de f_t, pour $t \to \infty$. Par suite de (8), on a nécessairement

$$f_\infty = \varphi$$

ce qui donne les conclusions du théorème.

c.q.f.d.

COROLLAIRE. - (M,g) *variété riemannienne compacte,* (M',g') *variété riemannienne (toutes deux sans bord). Soit* $\varphi : M \to M'$ *une application harmonique. On suppose* Δ_φ *strictement positif, dans le sens du théorème.*

Alors φ *est isolée dans l'ensemble des applications harmoniques* (C^1*-topologie).*

Démonstration. - On considère dans le C^1-voisinage ω donné par le théorème une autre application harmonique $f_\circ : M \to M'$. L'application f définie par $f(x,t) = f_\circ(x)$, $\forall x \in m$, $\forall t \in [0, \infty)$ est solution de (4). D'après le théorème on a nécessairement

$$f_\circ = \lim_{t \to \infty} f_t = \varphi .$$

c.q.f.d.

Remarque. - Une telle application n'a aucune raison d'être un minimum global de l'énergie.

4. CAS OU f EST UNE APPLICATION IDENTIQUE.

L'équation (6) se réduit alors à

$$\Delta X = -\mathrm{Tr}_g \nabla^{(2)} X - R(X) = 0$$

où R est maintenant la courbure de Ricci au sens habituel de la variété (M,g). En introduisant les isomorphismes $\#$ et $\flat$ de TM et T^*M canoniquement déduits de la métrique g et le laplacien de De Rham $\overline{\Delta}$ sur les 1-formes, on obtient la relation

$$\Delta X = \# \overline{\Delta} \flat X - 2R(X). \tag{9}$$

THEOREME 5. - *L'opérateur* Δ *s'écrit*

$$\Delta = \delta_s \circ \alpha - \# d \circ \delta$$

où δ *est la divergence*

d *est la différentielle des fonctions*

δ_s *est la divergence symétrique*

α *est la dérivée de Lie du tenseur* g :

$$\alpha(X) = \mathcal{L}_X g.$$

Remarque. - δ_s et δ sont les adjoints formels des opérateurs α et $\#$ d, ce qui peut d'ailleurs servir à les définir.

La démonstration de ce résultat est immédiate en coordonnées locales.

COROLLAIRE. - *Soit* $X \in C^2(TM)$. *On a équivalence entre*
i) $\Delta X = 0$ *et* $\delta X = 0$,
ii) $\alpha(X) = 0$.

Ce corollaire est donné dans [5], page 129.

Démonstration. - On a en effet

$$< \alpha(X), \alpha(X) > = < X, \delta_s [\alpha(X)] >$$

par suite de la remarque. Par suite

$$\|\alpha(X)\|^2 = < X, \Delta X + \# d(\delta X) >. \tag{10}$$

Supposons acquise la propriété (i). On déduit de (10) $\|\alpha(X)\| = 0$, d'où $\alpha(X) = 0$, puisque $\alpha(X)$ est continu.

En sens inverse, on a tout d'abord

$$\delta X = \mathrm{Tr}_g [\alpha(X)]$$

comme on le vérifie immédiatement en coordonnées locales. (ii) implique par conséquent $\delta X = 0$ et par suite du théorème $\Delta X = 0$.

c.q.f.d.

Remarque. - Dans le cas général de l'opérateur Δ_f, les résultats ci-dessus ne subsistent pas, bien que l'on ait encore $\Delta_f X = 0$, dès que $\alpha(X) = \mathcal{L}_X g = 0$ (voir [11]).

La décomposition donnée par le théorème 5 montre que cet opérateur n'est pas a priori de type positif. Cependant c'est le cas dans un certain nombre d'exemples particuliers [8] :

a) Lorsque la courbure de Ricci de (M,g) est non positive ;
b) sur la sphère (S^2, g_o).

Ce dernier exemple se généralise comme suit

THEOREME 6. - *Supposons* (M,g) *variété d'Einstein compacte de courbure de Ricci* $R = kg$, *avec* k *constant*, $k > 0$. *Alors tout* $X \in C^2(TM)$ *vérifiant*

$$\Delta X = 0$$

s'écrit de façon unique

$$X = Y + \# d\varphi$$

où Y *est une isométrie infinitésimale et* φ *une fonction propre du laplacien pour la valeur propre* 2k *:*

$$\Delta\varphi = 2k\varphi .$$

Démonstration. - Par définition des variétés d'Einstein, on a R = kg, k étant constant si dim $M > 2$. Si nous portons dans (9), nous obtenons

$$\bar{\Delta}\theta = 2k\theta$$

si on a posé $\theta = \flat X$. Il reste donc à trouver les 1-formes propres de l'opérateur de De Rham, ce qui peut se faire par une méthode inspirée de [7] :

a) La décomposition de De Rham commute avec $\bar{\Delta}$ et le produit par k. On a

$$\theta = H\theta + \delta\omega + d\varphi$$

où $H\theta$ est harmonique, $\omega \in A^2(M)$, $\varphi \in A^\circ(M)$. D'autre part

$$\bar{\Delta}\theta = \bar{\Delta}\delta\omega + \bar{\Delta}d\varphi .$$

Remarquons que cette décomposition est encore orthogonale puisque

$$\delta\bar{\Delta}\delta\omega = \bar{\Delta}\delta^2\omega = 0,$$
$$d\bar{\Delta}d\varphi = \bar{\Delta}d^2\varphi = 0.$$

Ceci nous donne que

$$\theta = \delta\omega + d\varphi$$

de façon unique, ω et φ vérifiant séparément

$$(11) \qquad \left| \begin{array}{l} \bar{\Delta}\delta\omega - 2k\,\delta\omega = 0, \\ d(\Delta\varphi - 2k\varphi) = 0. \end{array} \right.$$

La seconde équation donne la condition voulue pour φ, cette fonction étant déterminée à une constante additive près (M est compacte).

b) Posons $Y = \# \delta\omega$. On a immédiatement $\delta Y = 0$ et par suite de (11), $\Delta Y = 0$. Le corollaire vu ci-dessus achève la démonstration. c.q.f.d.

Remarque. - Si R = kg, avec $k \leqslant 0$, on peut appliquer les résultats de [3] et de [8] : en particulier, les éléments du noyau de Δ sont les champs de vecteurs parallèles. Le théorème 6 montre ce qui se passe dans le cas $k \geqslant 0$.

Remarque. - La décomposition ci-dessus est celle d'un champ de vecteurs quelconque en la somme d'un gradient et d'un champ sans divergence.

COROLLAIRE 1. - *Soit* (M,g) *une variété d'Einstein, dimension* (M) > 2, $R = kg$, *avec* $k > 0$. *On suppose que* $2k$ *n'est pas valeur propre du laplacien.*

Alors tout champ de vecteur harmonique est une isométrie infinitésimale.

Un champ de vecteur harmonique est un champ f-harmonique, avec f = identité. On appelle aussi les isométries infinitésimales les champs de vecteurs de Killing.

Démonstration. - Dans ce cas, l'équation

$$\Delta\varphi \doteq 2k\varphi$$

n'admet aucune solution non nulle. On a par conséquent $\varphi = 0$ dans la décomposition donnée par le théorème.

c.q.f.d.

Remarque. - Dans le cas de la sphère (S^2, g_o), on sait [5] que les champs de vecteurs harmoniques sont exactement les transformations infinitésimales conformes. Dans le cas des sphères (S^n, g_o) on déduit du théorème 6 :

COROLLAIRE 2. - *L'opérateur* Δ *sur* (S^n, g_o) *admet une seule valeurs propre négative. Les vecteurs propres correspondants sont les transformations infinitésimales conformes pures.*

Δ *admet la valeur propre 0. Les vecteurs propres correspondants sont les champs de Killing.*

L'opérateur Δ *est de type positif sur l'orthogonal des précédents.*

Pour démontrer ce corollaire ainsi que le suivant, il suffit d'utiliser le calcul explicite des valeurs propres donné dans [2], chapitre III, paragraphe C et les résultats classiques sur les sous-espaces propres des opérateurs elliptiques sur les variétés compactes.

En passant au quotient par l'application antipodale, on obtient

COROLLAIRE 3. - *L'opérateur* Δ *est de type positif sur l'espace projectif* $(P^n(\mathbb{R}), g_o)$. *Les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 sont les champs de Killing.*

Nous terminerons avec un résultat de stabilité des isométries parmi les harmoniques. Ce théorème est analogue, dans le cas réel, au théorème montré dans [6], pour les holomorphes. Nous ne donnons pas la démonstration de ce résultat car elle se trouve dans [11].

THEOREME 7. - *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte. On suppose*
i) $< \Delta X, X > \geqslant 0, \quad \forall X \in C^2(TM)$
ii) $< \Delta X, X > = 0 \Rightarrow$ X *est un champ de Killing.*

Alors toute composante C^2*-connexe d'applications harmoniques de* M *dans lui-même qui contient une isométrie est formée d'isométries.*

Rappelons que deux applications harmoniques f_o et f_1 appartiennent à la même composante C^2-connexe d'applications harmoniques s'il existe une C^2-application $F : M \times [0,1] \to M$ telle que

$$f_o(x) = F(x,0) \quad \text{et} \quad f_1(x) = F(x,1), \quad \forall x \in M$$

et

$$\tau(F_t) = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, *Lectures on Elliptic Boundary Value problems*, Van Nostrand, 1965.

[2] BERGER, GAUDUCHON, MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer - Verlag, 1971 (Lecture Notes, n° 194).

[3] J. EELLS et J.H. SAMPSON, *Harmonic mappings of riemannian manifolds*, Amer. J. of Math., 86 (1964), 109-160.

[4] P. HARTMAN, *On homotopic harmonic maps*, Canad. J. Math., 9 (1967), 673-687.

[5] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, 1958, Paris.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Applications harmoniques et variétés kählériennes*, 1970, Ist. Naz. di Alta Mat. Bologna.

[7] H.P. Mc KEAN et I.M. SINGER, *Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geom. 1 (1967), 43-70.

[8] E. MAZET, *La variation seconde de l'énergie*, J. Diff. Geom. 8 (1973), 279-296.

[9] J.C. MITTEAU, *L'équation parabolique sur les applications de variétés*, Thèse Paris 1971.

[10] J.C. MITTEAU, *Sur les applications harmoniques*, J. Diff. Géom., 9 (1974), 41-54.

[11] J.C. MITTEAU, *Stability of isometries among harmonic mappings*, Trieste, 1975, à paraître.

Jean-Claude MITTEAU
Ecole Nationale Supérieure de
l'Aéronautique et de l'Espace
B.P. 4032

31055 TOULOUSE CEDEX

◇◇◇◇◇