

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALAIN RAPP

## L'équation $\bar{\partial}$ avec décroissance au bord sur certains ouverts convexes d'un espace de Banach

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 46 (1976), p. 67-72

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1976\\_\\_46\\_\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__67_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'EQUATION " $\bar{\partial}$ " AVEC DECROISSANCE AU BORD SUR CERTAINS OUVERTS  
 CONVEXES D'UN ESPACE DE BANACH

par Alain RAPP

Etant donnée une forme différentielle  $\omega$ , continûment différentiable,  $\bar{\partial}$  fermée, de type  $(0, q)$  sur un ouvert convexe à frontière régulière d'un espace de Banach complexe, on montre que l'équation  $\bar{\partial}\alpha = \omega$  admet une solution lorsque  $\omega$  satisfait à des conditions de décroissance au bord de l'ouvert et "d'uniforme intégrabilité" au voisinage de l'infini.

NOTATIONS.

Soit  $E$  un espace de Banach complexe ;  $U$  un ouvert de  $E$  ;  $\Omega_k^{(q)}(U)$  désignera l'espace des formes différentielles  $k$ -fois continûment différentiables sur  $U$  et de type  $(0, q)$ . Etant donnée une fonction  $V$  continue sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathring{V}$  l'ouvert défini par  $\{\xi \in E \mid V(\xi) < 0\}$ .

On dira que la frontière de  $\mathring{V}$  est régulière par morceaux si  $V$  est l'enveloppe supérieure d'une famille finie  $(V_i)$  de fonctions continûment différentiables telles que chaque  $V_i$  soit bornée sur  $\mathring{V}$  et non nulle sur la frontière de  $\mathring{V}$ .

OPERATEURS  $k_q$ . - Dans la suite,  $X_0$  est un vecteur non nul de  $E$ . A toute forme  $\omega$  dans  $\Omega_0^{(q)}(U)$ , on associe la forme  $\omega_{X_0}$  de  $\Omega^{(q-1)}(E)$  définie par

$$\omega_{X_0}(\xi ; X_1, \dots, X_{q-1}) = \omega(\xi ; X_0, X_1, \dots, X_{q-1})$$

lorsque  $\xi \in U$  et

$$\omega_{X_0}(\xi ; X_1, \dots, X_{q-1}) = 0$$

lorsque  $\xi \in E \setminus U$ .

Lorsque l'application  $t \rightarrow \omega_{X_0}(\xi + tX_0 ; X_1, \dots, X_{q-1})$  est intégrable par rapport à la mesure du plan complexe  $(\overline{dt} \wedge dt)/t$ , quel que soit  $\xi$  dans  $U$  et  $X_1, \dots, X_{q-1}$  dans  $E^{q-1}$ , on pose

$$k_q(\omega)(\xi) = \frac{q}{2i\pi} \int \omega_{X_0}(tX_0 + \xi) \frac{\overline{dt} \wedge dt}{t}$$

OPERATEUR  $\bar{\partial}$ . - Soit  $\omega$  dans  $\Omega^{(q)}(U)$ . On définit  $\bar{\partial}\omega$  par

$$(\bar{\partial}\omega)(\xi ; X_1, \dots, X_{q+1}) = \frac{1}{q+1} \sum_{k=1}^{k=q+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial\omega}{\partial \bar{X}_k} (\xi ; X_1, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{q+1})$$

Lorsque  $\omega$  est seulement dans  $\Omega_o^{(q)}(U)$ , pour tout sous-espace vectoriel  $H$  de dimension finie dans  $E$ , la restriction de  $\omega$  à  $U \cap H$  définit un courant [1] ; on posera  $\bar{\partial}_H(\omega) = \bar{\partial}(\omega|_{U \cap H})$  au sens des courants.

Etant donné  $\omega$  dans  $\Omega_o^{(q)}(U)$ , on dira que  $\omega$  admet globalement un  $\bar{\partial}$  s'il existe  $\pi \in \Omega_o^{(q+1)}(U)$  tel que  $\bar{\partial}_H(\omega) = \pi|_H$ , pour tout  $H$  sous-espace de dimension finie de  $E$ .

On remarquera que si  $\omega \in \Omega_1^{(q)}(U)$ , alors  $\omega$  admet globalement un  $\bar{\partial}$  qui coïncide avec le  $\bar{\partial}$  habituel.

Lorsque  $\omega$  est dans  $\Omega_1^{(q)}(U)$ , on notera  $\omega'$  l'application dérivée pour la structure réelle sous-jacente de  $E$ .

THEOREME 1. - Soit  $\mathring{V}$  un ouvert convexe borné à frontière régulière par morceaux de  $E$ . Soit  $\omega$  dans  $\Omega_1^{(q)}(\mathring{V})$  tel que

(i)  $\forall X^q \in E^q, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\sup |\omega(\xi ; X^q)|, -\epsilon < V(\xi) < 0| = 0$

(ii) Il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $(\bar{\partial}\omega)(\xi ; X^{q+1})$ , resp.  $\omega'(\xi ; X^{q+1})$ , soit borné sur  $\{\xi | -\epsilon < V(\xi) < 0\}$ , pour tout  $X^{q+1} \in E^{q+1}$ .

Alors

(a)  $|k_q|(\omega)$  admet globalement un  $\bar{\partial}$ , resp.  $k_q(\omega) \in \Omega_1^{(q-1)}(\mathring{V})$

(b)  $\bar{\partial}k_q(\omega)$  et  $k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)$  sont dans  $\Omega_o^{(q)}(\mathring{V})$  et  $\omega = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega) + \bar{\partial}(k_q(\omega))$ .

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME. - Soit  $\mathring{V}$  un ouvert convexe, borné, de  $E$  à frontière régulière par morceaux et  $X_o$  un vecteur non nul de  $E$ . Alors :

Mes  $\frac{d\epsilon \wedge dt}{t} \{t \in \mathbb{C} | -\epsilon < V(\xi \text{rt} X_o) < 0\}$  est un  $\mathcal{O}(\epsilon)$  localement uniformément par rapport à  $\xi$ .

*Démonstration.* - Posons  $\phi_i(\zeta, \lambda, x, y) = V_i(\zeta + (x+iy)X_o) + \lambda$ . En utilisant la convexité de  $\mathring{V}_1$  on constate d'abord que, pour tout  $\zeta_o, x_o, y_o$  tels que

$\zeta_o \in \mathring{V}$  et  $\zeta_o + (x_o + iy_o)X_o \in \partial \mathring{V}_1 \cap \bar{\mathring{V}}$ , l'une des dérivées partielles.

$\frac{\partial \phi_i}{\partial y}(\zeta_o, 0, x_o, y_o)$  ou  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\zeta_o, 0, x_o, y_o)$  est non nulle.

Supposons, pour fixer les idées, que  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}$  ne s'annule pas en  $(\zeta_0, 0, x_0, y_0)$  et appliquons le théorème des fonctions implicites. Il existe un voisinage  $W$  de  $(\zeta_0, 0, x_0)$ , un intervalle  $]A', B'[$  contenant  $y_0$  et une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  définie sur  $W$ , à valeurs dans  $]A', B'[$ , tels que  $y = \varphi(\zeta, \lambda, x)$  soit solution implicite de l'équation  $\phi_i(\zeta, \lambda, x, y) = 0$  avec  $(\zeta_0, 0, x_0, y_0)$  comme conditions initiales. Puisque chaque  $V_i^1$  ne s'annule pas au bord, on choisit  $W$  de telle sorte que  $|V_i^1 \circ \varphi|$  soit borné inférieurement par un nombre  $a > 0$  sur  $W$ . Il existe ainsi un voisinage  $V$  de  $\zeta_0$ , un intervalle  $]A, B[$  contenant  $x_0$  et un nombre  $\alpha$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \alpha[$  et  $\zeta \in V$ , on ait :

$$\overset{\circ}{V}_{i, \zeta}^\varepsilon \cap \{]A, B[ \times ]A', B'[\} = \{x + i\varphi(\zeta, \lambda, x) \mid x \in ]A, B[, 0 \leq \lambda < \varepsilon\}$$

Puisque  $|V_i^1 \circ \varphi|$  est minoré par  $a$  sous les conditions précédentes,  $|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}|$  est majoré par  $\frac{1}{a}$  sous les mêmes conditions, et l'aire de l'ensemble :

$\overset{\circ}{V}_{i, \zeta}^\varepsilon \cap \{]A, B[ \times ]A', B'[\}$  est majoré par  $\frac{B-A}{a} \cdot \varepsilon$ , pour  $\varepsilon < \alpha$  et  $\zeta \in V$ . Un argument de compacité permet maintenant de construire un ouvert  $\Delta$  contenant  $E_{\zeta_0}^i$  et un nouveau voisinage  $V$  de  $\zeta_0$  tel que l'aire de  $\overset{\circ}{V}_{i, \zeta}^\varepsilon \cap \Delta$  soit majoré par  $K \cdot \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$  dans  $V$ . De plus, pour  $\varepsilon$  assez petit et  $\zeta$  assez voisin de  $\zeta_0$ , les  $t$  pour lesquels  $\zeta + tX_0$  appartient à  $\overset{\circ}{V}_{i, \zeta}^\varepsilon \cap \overset{\circ}{V}$ , appartiennent à  $\Delta$ .

On en déduit donc que l'aire de  $\{t \mid \zeta + tX_0 \in \overset{\circ}{V}_{i, \zeta}^\varepsilon \cap \overset{\circ}{V}\}$  est un  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  localement uniformément par rapport à  $\zeta$ . On a clairement la même conclusion pour l'ensemble  $\{t \mid \zeta + tX_0 \in \overset{\circ}{V}^\varepsilon\}$ . Enfin la distance de l'origine à  $\overset{\circ}{V}_{i, \zeta}^\varepsilon \cap \overset{\circ}{V}_\zeta$  est s.c.i. par rapport à  $\zeta$  et décroissante par rapport à  $\varepsilon$ ; elle est donc localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif, indépendant de  $\varepsilon$ ; on obtient ainsi la même conclusion en substituant la mesure  $\frac{dt \wedge dt}{|t|}$  à celle de Lebesgue.

Revenons à la démonstration du théorème :

Considérons une fonction  $\psi$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^N$ , où  $N$  est le nombre de fonctions  $V_i$  dont  $V$  est l'enveloppe supérieure, telle que  $\psi(x) = 1$  si  $x \in ]-\infty, -1]^N$  et  $\psi(x) = 0$  si l'une des variables  $x_i$  est dans l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

La forme  $|\omega_\varepsilon|$ , définie par  $\psi(\frac{V_1+2\varepsilon}{\varepsilon}, \dots, \frac{V_N+2\varepsilon}{\varepsilon})$ .  $\omega_\varepsilon$ , appartient à  $\overset{\circ}{\Omega}_1^q(V)$ , on peut donc lui appliquer un résultat établi par P. BERNER [2], selon lequel :

$$\omega_\varepsilon = k_{q+1}(\overline{\partial}\omega_\varepsilon) + \overline{\partial}(k_q(\omega_\varepsilon)).$$

En appliquant le lemme ci-dessus, on constate que  $k_{q+1}(\overline{\partial}\omega_\varepsilon)$  converge localement uniformément vers  $k_{q+1}(\overline{\partial}\omega)$ ; de plus il est clair que  $\overline{\partial}(k_q(\omega_\varepsilon)) = \omega_\varepsilon - k_{q+1}(\overline{\partial}\omega_\varepsilon)$

converge localement uniformément vers  $\pi = \omega - k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)$ .

Ainsi  $k_q(\omega)$  admet globalement un  $\partial$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial k_q(\omega_\varepsilon) = \partial k_q(\omega)$ .

On a donc par passage à la limite :

$$\omega = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega) + \bar{\partial}(k_q(\omega)).$$

Lorsque  $\omega'(\zeta, X^{q+1})$  est borné sur  $\{\zeta \mid -\varepsilon < V(\zeta) < 0\}$  pour tout  $X^{q+1}$  dans  $E^{q+1}$ , on démontre de même que  $[k_q(\omega_\varepsilon)]'$  converge localement uniformément par rapport à  $\zeta$  vers :

$$\frac{q}{2i\pi} \int_{V_\zeta} (\omega_{X_0})'(\zeta + tX_0) \frac{\bar{d}t \wedge dt}{t}.$$

Le "respectivement" s'en déduit alors facilement :

COROLLAIRE 1. - Soit  $\omega$  une forme de  $\Omega_1^{(0,q)}(\mathring{V})$ ,  $\bar{\partial}$  fermée, telle que

$$(i) \quad \forall X \in E^q \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{-\varepsilon < V(\zeta) < 0} |\omega(\zeta)(X)|) = 0$$

Alors  $k_q(\omega)$  admet globalement un  $\bar{\partial}$  et  $\bar{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$ .

*Remarque.* - Si la norme de  $E$  est de classe  $C^1$  sur  $E \setminus \{0\}$ , on peut appliquer les résultats ci-dessus à toute boule ouverte  $B$  de  $E$ , ce qui permet en particulier

de voir que si  $\omega, \bar{\partial}$  fermée, appartient à  $\Omega_1^{(q)}(B)$  et si  $\|\omega(\zeta)\|$  tend vers zéro quand  $d(\zeta, \partial B)$  tend vers zéro, alors  $k_q(\omega)$  admet globalement un  $\bar{\partial}$  et  $\bar{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$ .

Le résultat suivant étend, sous certaines conditions, le théorème 1 à des ouverts non bornés. On supposera dans la suite que la norme de  $E$  est de classe  $C^1$  sur  $E \setminus \{0\}$ .

THEOREME 2. - Soit  $\mathring{V}$  un ouvert convexe de  $E$ , à frontière régulière par morceaux. Soit  $\omega$  dans  $\Omega_1^{(q)}(\mathring{V})$  tel que :

$$(i) \quad \forall X^q \in E^q, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\sup_{-\varepsilon < V(\zeta) < 0} |\omega(\zeta; X^q)|| = 0.$$

(ii) Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $(\bar{\partial}\omega)(\zeta; X^{q+1})$ , resp.  $\omega'(\zeta; X^{q+1})$  soit borné sur  $\{\zeta \mid -\varepsilon < V(\zeta) < 0\}$  pour tout  $X^{q+1} \in E^{q+1}$ .

(iii) Pour tout  $\zeta_0$  de  $\mathring{V}$ , il existe un voisinage  $W$  de  $\zeta_0$  tel que :

$$\sup_{\zeta \in W} |\omega_{X_0}(\zeta + tX_0; X^q)| \quad \text{et} \quad \sup_{\zeta \in W} |\bar{\partial}(\omega, \text{resp. } \omega')_{X_0}(\zeta + tX_0; X^{q+1})|$$

sont intégrables par rapport à la mesure  $\frac{\bar{d}t \wedge dt}{|t|}$ , pour tout  $X^{q+1}$  dans  $E^{q+1}$  ou  $X^q$  dans  $E^q$ .

Alors :

a)  $k_q(\omega)$  admet globalement un  $\bar{\partial}$ , resp.  $k_q(\omega) \in \Omega_1^{(q-1)}(\overset{\circ}{V})$ .

b)  $\bar{\partial}k_q(\omega)$  et  $k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)$  sont dans  $\Omega_0^{(q)}(\overset{\circ}{V})$  et  $\omega = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega) + \bar{\partial}(k_q(\omega))$ .

Démonstration. - Soit  $\psi$  une fonction décroissante de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , nulle sur  $]1, +\infty[$  et identique à 1 sur  $]-\infty, -1[$ .

Soit  $\alpha_n$  défini par  $\alpha_n(x) = \psi\left(\frac{\|x\|^2 - 2n}{n}\right)$ . Posons  $\omega_n = \alpha_n \cdot \omega$ . En appliquant le théorème 1 à l'intersection de  $\overset{\circ}{V}$  avec la boule centrée à l'origine de rayon  $\sqrt{3n}$ , on obtient :

$$(1) \quad \omega_n = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega_n) + \bar{\partial}k_q(\omega_n).$$

L'hypothèse (iii) permet le passage à la limite pour obtenir le résultat.

COROLLAIRE 2. - Soit  $\omega$  une forme dans  $\Omega_1^{(q)}(\overset{\circ}{V})$ ,  $\bar{\partial}$ -fermée, telle que :

(i)  $\forall X^q \in E^q, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup_{\tau} |\omega(\zeta)(X^q)|, \tau | -\varepsilon < V(\zeta) < 0) = 0$ .

(ii) Pour tout  $\zeta_0 \in V$ , il existe un voisinage  $W$  de  $\zeta_0$ , tel que

$\sup_{\zeta \in W} |\omega_{X_0}(tX_0 + \zeta; |X^{q-1}|)|$  est intégrable par rapport à la mesure  $\frac{\bar{d}t \wedge dt}{t}$ , quel que soit  $X^{q-1}$  dans  $E^{q-1}$ .

Alors  $k_q(\omega)$  admet globalement un  $\bar{\partial}$  et  $\bar{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$ .

Remarque. - Le théorème 2 et le corollaire 2 s'appliquent à tout l'espace ; on peut en particulier en déduire le résultat suivant :

Pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_1^{(q)}(E)$ ,  $\omega$   $\bar{\partial}$ -fermée, telle  $\|\omega(\zeta)\| < \frac{A}{k + \|\zeta\|^2}$  alors  $k_q(\omega)$  admet globalement un  $\bar{\partial}$  et  $\bar{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Gordon and Beach distribué par Dunod, 1967.
- [2] P. BERNER, Conférence à Dublin (non publié).
- [3] C.J. HENRICH, *The  $\bar{\partial}$ -equation with polynomial growth on a Hilbert space*, Public Dept. of Math. Fordham Un. Broux, New-York.
- [4] L. GROSS, *Abstract Wiener spaces (in proceedings of the fifth Berkeley)*, Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 2, Part. I, 1965, p. 31-42.

Alain RAPP  
U.E.R. de Mathématiques  
Université de Nancy I  
Case officielle 140  
54037 NANCY CEDEX

\*\*\*\*\*