MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Retour sur la méthode de Čebyšev dans la théorie des nombres premiers

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 41-45
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__41_0>

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math. France
Mémoire 49-50, 1977, p. 41-45

RETOUR SUR LA METHODE DE ČEBYŠEV DANS LA THEORIE DES NOMBRES PREMIERS

par

Jean-Marc DESHOUILLERS

On démontre par la méthode élémentaire de Čebyšev les majorations :

$$\overline{\lim}\ \psi(x)/x < 1{,}07031$$

$$\psi(x)/x < 1{,}075 \qquad \text{si} \quad x > 0$$

On discute enfin la possibilité d'utiliser la méthode de Čebyšev pour encadrer $\psi(x)$ pour des valeurs de x situées légèrement au-delà des tables existantes.

---

§ 1 - INTRODUCTION -

On définit les fonctions θ et ψ de Čebyšev par les relations :

(1) $\theta(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \mathrm{Log}\ p$ (où p désigne toujours un nombre premier)

(2) $\psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha \leqslant x} \mathrm{Log}\ p$

Partant de la relation (dans laquelle la somme est finie) $\mathrm{Log}[x]! = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi(x/u)$ (*) Čebyšev a trouvé :

$$\mathrm{Log}\ \frac{[x]!\ [x/30]!}{[x/2]!\ [x/3]!\ [x/5]!} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, \psi(x/u),$$ où ε_n est donné par :

Classe de n mod. 30	1	6	7	10	11	12	13	15	17	18	19	20	23	24	29	30	Autre
ε_n	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0

Posons :

(3) $A : \mathrm{Log}^{1/2} \,.\, 3^{1/3} \,.\, 5^{1/5} \,.\, 30^{-1/30}$ $\quad (A = 0{,}92129202\ldots)$;

une version effective de la formule de Stirling conduit alors à l'encadrement valable pour $x \geqslant 30$:

(4) $Ax + \sum\limits_{n=6}^{\infty} \varepsilon_n\, \psi(x/u) - \frac{5}{2}\,\mathrm{Log}\ x - 5 < \psi(x) < Ax + \sum\limits_{n=6}^{\infty} \varepsilon_n\, \psi(x/u) + \frac{5}{2}\,\mathrm{Log}\ x + 4$

il résulte du tableau des valeurs de ε_n que la série écrite est alternée (si l'on omet les termes nuls), et on peut donc la majorer par 0 et la minorer par $-\psi(x/6)$; Čebyšev en a déduit :

(*) La notation $[u]$ désigne la partie entière du nombre réel u, c'est-à-dire le plus grand entier n tel que $u \geqslant n$.

(5) $\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \psi(x)/x \leqslant 6\,A/5\ (= 1{,}10555\ldots)$, $\underline{\lim_{x\to\infty}}\ \psi(x)/x \geqslant A$;

on a également les relations :

(6) pour $x > 10^4$: $0{,}918 < \psi(x)/x < 1{,}130$

(7) pour $x > 10^8$: $0{,}92129 < \psi(x)/x < 1{,}10556$.

On trouvera dans la première partie de l'ouvrage de A. BLANCHARD [1] une démonstration de tous les résultats affirmés jusqu'ici.

Par une méthode combinatoire, D. HANSON [2] a démontré récemment :
pour $x > 1$: $\psi(x)/x < \mathrm{Log}\ 3 = 1{,}09861$

Signalons enfin que l'on a l'équivalence de $\psi(x)$ et de x (c'est le théorème des nombres premiers); la méthode analytique de démonstration du T.N.P. conduit à de très bons résultats effectifs (cf. les travaux de J.B. ROSSER et L. SCHOENFELD [5]) mais au double prix de l'utilisation d'une méthode conceptuellement bien plus délicate et de gros calculs numériques; la méthode " élémentaire " de démonstration du T.N.P. conduit pour sa part à des encadrements effectifs catastrophiques.

Le but du présent article est triple :

a) montrer que l'on peut partir de la relation (4) pour obtenir une majoration $\psi(x)/x$ supérieure (en qualité !) à (7);

b) partir de la même relation (4) pour obtenir une majoration $\overline{\lim}\ \psi(x)/x$ plus précise que (5);

c) montrer que des relations du genre (4) ont un rôle à jouer dans la détermination de $\psi(x)/x$ (et des fonctions analogues) pour des valeurs de x proches, mais supérieures à celles pour lesquelles un calcul effectif a été entrepris.

§ 2 - MAJORATION DE $\psi(x)/x$ -

De (4) on déduit, pour tout x supérieur à 30 :

$$A - \frac{2{,}5\ \mathrm{Log}\ x + 5}{x} < \psi(x)/x < A + \frac{2{,}5\ \mathrm{Log}\ x + 4}{x} + \frac{1}{x}\left(\psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{10}\right) - \psi\left(\frac{x}{7}\right)\right)$$

En utilisant la relation (6), on déduit successivement :

pour $x > 10^5$: $0{,}920 < \psi(x)/x < 1{,}092$

pour $x \geqslant 10^6$: $0{,}92125 < \psi(x)/x < 1{,}08111$

pour $x \geqslant 10^7$: $0{,}92128 < \psi(x)/x < 1{,}07799$

pour $x \geqslant 10^8$: $0{,}92129 < \psi(x)/x < 1{,}07715$

En utilisant le fait que pour tout x positif inférieur à 10^8, $\psi(x)/x$ est inférieur à 1,04 (cf. [5]), on a :

THEOREME 1 -

Pour tout nombre réel positif x on a : $\psi(x)/x < 1{,}07715$; ou encore :

$$\prod_{p^\alpha \leqslant x} p < (2{,}937)^x.$$

§ 3 - MAJORATION DE $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\ \psi(x)/x$

3.1 - Soit $\Lambda = \overline{\lim}\ \psi(x).x$ et $\lambda = \underline{\lim}\ \psi(x)/x$. De la relation (4), on déduit :

$$\Lambda(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{10}) \leqslant A - \lambda(\frac{1}{7})$$

en remplaçant λ par la minoration (5), on a :

$$\Lambda \leqslant \frac{90}{77} A < 1,07684$$

3.2 - Reprenant la relation (4), on peut écrire :

(8) $\Lambda(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{15}) \leqslant A(1 - \frac{1}{7}) + \overline{\lim}\ \frac{1}{x}\ \{(\psi(\frac{x}{10}) - \psi(\frac{x}{11})) + (\psi(\frac{x}{12}) - \psi(\frac{x}{13}))\}$.

Il résulte de la théorie du crible de Selberg, ou du crible de Montgomery (cf. [3]) que l'on a la majoration :

(9) $\overline{\lim}\ \frac{1}{x}\ \{\psi(\alpha\ x) - \psi(\beta\ x)\} \leqslant 2(\alpha - \beta)$ si $0 < \beta < \alpha$

En regroupant (8) et (9), on a le résultat suivant :

THEOREME 2 -

On a : $\overline{\lim}\ \psi(x)/x \leqslant \frac{30}{23}\ \{\frac{6A}{7} + \frac{133}{4290}\} < 1.07045.$

3.3 - On peut légèrement améliorer ce résultat en partant des relations $\lambda \geqslant \frac{6}{5}\ (A - \frac{\Lambda}{7})$ et $\Lambda \leqslant \frac{30}{23}\ (A - \frac{\lambda}{7} + \frac{133}{4290})$, ce qui conduit à $\lambda \leqslant 0,92206$ et $\Lambda \leqslant 1,07031$.

§ 4 - UTILISATION DE LA METHODE DE ČEBYŠEV POUR " PROLONGER " LES TABLES -

Pour évaluer certaines fonctions arithmétiques (notre exemple sera ψ, mais les mêmes remarques s'appliquent à θ, π, $M = \sum\limits_{n\leqslant x} \mu(n)$, ...) on a généralement recours à deux procédés :

i - Un calcul direct jusqu'à une certaine valeur, dépendant des moyens de calcul dont on dispose (10^8 à l'heure actuelle).

ii - Une méthode théorique permettant d'obtenir un encadrement, généralement d'autant meilleur que l'on est proche de l'infini (pour la topologie usuelle).

Il y a un saut assez considérable entre les deux types de résultat; ainsi, un calcul direct conduit à la majoration :

(10) $-\sqrt{x} < \psi(x) - x < \sqrt{x} + 3^3\ \sqrt{x}$ si $x < 10^8$ tandis que, par le biais de techniques analytiques, J.B.ROSSER et L. SCHOENFELD (cf. [5]) obtiennent :

(11) $|\psi(x) - x| < 0,001202\ x$ pour $x > 10^8$

Une formule du genre (4) offre pour sa part la possibilité d'encadrer $\psi(x)$ si l'on connaît $\psi(y)$ pour $y \leqslant x/6$; on dispose ainsi d'un autre procédé pour évaluer $\psi(x)$ quand x est compris entre 10^8 et 6.10^8; une application directe de ce principe conduit malheureusement à des résultats assez décevants; partant de (10), on obtient des résultats inférieurs à (11). (Notons cependant que l'on peut obtenir ainsi la majoration suivante que nous utiliserons par la suite :

(12) $\psi(x)/x < 1,075$ pour $x < 7,7.10^{11}$).

La faiblesse du résultat provient essentiellement du fait que l'on a majoré une expression du genre $\psi(\alpha x) - \psi(\beta x)$ par $(\alpha - \beta) x + (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \sqrt{x} + 3 \sqrt[3]{\alpha x}$ pour des valeurs de α et β voisines; c'est-à-dire que la formule (10) fournit une très bonne approximation de $\psi(x)$, mais une mauvaise appréciation de la variation de ψ sur de petits intervalles.

En conclusion, il nous paraît utile d'encourager le prochain calculateur qui prolongera les tables existantes à conserver (et publier) non seulement un résultat global (du genre (10)), mais aussi les variations de ψ sur de petits intervalles $[n\,U, (n+1)\,U[$, avec U de l'ordre de $10^5 - 10^6$, ce qui est parfaitement raisonnable. Mentionnons également la possibilité d'obtenir des formules analogues à (4), par exemple en développant

$$\mathrm{Log}\,\frac{[x]!\,[x/30]!\,[x/6]!}{[x/2]!\,[x/3]!\,[x/5]!\,[x/7]!\,[x/42]!} = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{10}\right)\ldots$$

ce qui fournit une formule moins agréable que (4) car les signes ne sont pas alternés (mais presque), mais qui fournit des évaluations de ψ sur $[6.10^8, 10.10^8]$ supérieures à ce que l'on obtient par une application de (4) réitérée.

§ 5 - MAJORATION DE $\psi(x)/x$ (bis)

Le but de ce paragraphe est de donner une démonstration élémentaire du résultat suivant :

THEOREME 3 -

$\psi(x)/x < 1.075 < \mathrm{Log}\ 2,93$ pour $x > 0$.

Ce théorème améliore le théorème 1, mais sa démonstration en est beaucoup plus longue, dans la mesure où elle repose sur la majoration (13) obtenue (de manière élémentaire) par H.L. MONTGOMERY et R.C. VAUGHAN [4] :

$$(13)\quad \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \psi\left(\frac{x}{n+1}\right) < \frac{2\,x}{\mathrm{Log}\,x}\left(\frac{1 - \mathrm{Log}\,n/\mathrm{Log}\,x}{1 - \mathrm{Log}(n(n+1))/\mathrm{Log}\,x}\right) + \sqrt{x} \quad \text{pour}$$

$n = 10$, $n = 12$ et $x > 10^8$.

De la formule (4), on déduit la majoration :

$$(14)\quad \psi(x) < 6\,Ax/7 + 2{,}5\,\mathrm{Log}\,x + 4 + \psi(x/6) + \psi(x/15) + (\psi(x/10) - \psi(x/11)) + (\psi(x/12) - \psi(x/13))$$

En utilisant le théorème 1 et les relations (13) et (14) on obtient :

(15) $\psi(x)/x < 1{,}07542$ si $x > 3{,}4\ .\ 10^9$

En partant des relations (13), (14) et (15) on obtient :

(15') $\psi(x)/x < 1{,}075009$ si $x > 5{,}1\ .\ 10^{10}$

De (13), (14) et (15'), on déduit :

(15") $\psi(x)/x < 1{,}07492$ si $x > 7{,}7\ .\ 10^{11}$

Le théorème 3 résulte alors des relations (12) et (15").

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BLANCHARD.- Initiation à la théorie analytique des nombres premiers.- Dunod - Paris (1969).

[2] D. HANSON.- On the product of the primes.- Canad. Math. Bull. 15 (1972); 33-37.

[3] H.L. MONTGOMERY.- Topics in Multiplicative Number Theory.- Lectures notes 227. Springer (1971).

[4] H.L. MONTGOMERY et R.C. VAUGHAN.- Hilbert's inequality and the large Sem. de Theorie des Nombres, Université de Bordeaux I.- (1971-1972); exposé n° 20, 6 p.

[5] J.B. ROSSER et L. SCHOENFELD.- Sharper bounds for the Cebysev functions $\psi(x)$ and $\theta(x)$.- Math.of Comput. 29 (1975).- 243-269.

Jean-Marc DESHOUILLERS
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
Laboratoire associé au C. N. R. S.
Université de BORDEAUX I
351, cours de la Libération
33405 - TALENCE Cédex