MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MAX FONTET

Calcul du centralisateur d’un groupe de permutations

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 53-63
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__53_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Calculateurs en Math. (1975 - LIMOGES)
Bull. Soc. math France
Mémoire 49-50, 1977, p. 53-63

CALCUL DU CENTRALISATEUR D'UN GROUPE DE PERMUTATIONS

par Max FONTET

1.- INTRODUCTION

La théorie des graphes est devenue un outil très utile pour l'étude des groupes de permutations. Nous présentons dans cet article un exemple d'utilisation d'algorithmes de manipulation de graphes pour le calcul du centralisateur d'un groupe de permutation G agissant sur l'ensemble X, dans le groupe symétrique correspondant $\mathfrak{S}_X$.

Nous prouvons en particulier l'existence d'un algorithme calculant les orbites du centralisateur d'un groupe de permutation G agissant sur l'ensemble X engendré par une famille de k permutations de genre nul en un temps $O(k|X|)$, ainsi que d'un algorithme calculant un système de générateurs du même groupe en temps et place $O(k|X|^2)$.

2.- GENERALITES

2.1. ENONCE DU PROBLEME

Etant donné un groupe de permutations G agissant sur un ensemble X et engendré par une famille de k permutations $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ on note G, (G, X) ou (G, X, Θ) le groupe ainsi défini suivant la précision de notation dont on a besoin.

On se propose de calculer le centralisateur $C(G)$ d'un tel groupe (G, X, Θ) dans le groupe symétrique correspondant $\mathfrak{S}_X$.

On associe habituellement au groupe (G, C, Θ) un graphe orienté étiqueté $\mathcal{G} = (X, A)$ où X est l'ensemble de ses sommets et A l'ensemble de ses arcs étiquetés. ($A \subset X \times X \times [k]$, $[k]$ désignant l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à k; les arcs du graphe $\mathcal{G}$ sont définis par :

$$(x, y, i) \in A \iff x\,\theta_i = y$$

2.2. QUELQUES DEFINITIONS : GRAPHES ET GROUPES DE PERMUTATIONS

Deux graphes $\mathcal{G} = (X, A)$ et $\mathcal{G}' = (X', A')$ sont <u>isomorphes</u> ssi il existe une bijection ϕ de l'ensemble des sommets X de $\mathcal{G}$ sur l'ensemble des sommets X' de $\mathcal{G}'$ qui induit une bijection de l'ensemble des arcs A de $\mathcal{G}$ sur l'ensemble des arcs A' de $\mathcal{G}'$:

$$(x, y) \in A \iff (x\,\phi, y\,\phi) \in A'$$

Deux groupes de permutations (G, X) et (G', X') sont <u>équivalents</u> ssi il existe un isomorphisme ϕ du groupe G sur le groupe G' et une bijection η de l'ensemble X sur l'ensemble X' tels que :

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, g \in G \quad (x\,y)\,\eta : (x\,\eta)\,(y\,\phi)$$

Par exemple, les groupes d'automorphismes de deux graphes isomorphes sont deux groupes de permutations équivalentes.

Nous renvoyons respectivement au livre de Berge (2) et de Wielandt (15) pour les définitions des concepts usuels de la théorie des graphes et de celles des groupes de permutations.

2.3. DEFINITION DE LA COMPLEXITE D'UN ALGORITHME

On analyse principalement les performances d'un algorithme en évaluant sa complexité en temps et en place. Pour faire cette évaluation, on définit un modèle théorique de machine représentant aussi fidèlement que possible le fonctionnement d'un ordinateur standard. L'évaluation de la complexité en temps des programmes consiste alors à dénombrer les pas élémentaires de calcul constituant le programme; ces pas élémentaires de calcul se codent eux-mêmes en une suite donnée d'instructions élémentaires de la machine théorique qui, par définition, sont exécutées en une unité de temps. Ce procédé permet de définir de façon précise le temps d'exécution d'un programme en fonction de la taille de ses données. On dit qu'un algorithme effectue un calcul en temps $O(f(n))$ où n est la taille des données s'il existe une constante c telle que le temps de calcul de l'algorithme soit inférieur ou égal à $c\ f(n)$.

3.- CENTRALISATEUR D'UN GROUPE DE PERMUTATIONS

3.1. Lorsque le groupe (G, X) est intransitif, l'ordre du groupe $(C(G), X)$ n'est borné que par $|X|\ !$. On peut toujours reconstruire tous les éléments du groupe $C(G)$ à partir de la donnée de ses orbites. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe un système générateur de $C(G)$ d'au plus $|X|$ permutations, chacune de ses permutations pouvait être construite en temps et place $O(k|X|)$, une fois les orbites de $C(G)$ connues.

Rappelons que, lorsque le groupe G est transitif, un résultat classique affirme que :

PROPOSITION :

Si G est un groupe transitif, $C(G)$ est un groupe semi-régulier.

3.2. Etant donné un groupe (G, X, Θ) on note $X_1, X_2, \ldots, X_m$ la famille de ses orbites et G_i la restriction de l'action de G à l'orbite X_i. Notons d'autre part $Y_1, \ldots, Y_n$ les orbites de $(C(G), X)$.

Etant donnés deux points x et y de X appartenant à deux orbites X_i et X_j de G et à une même orbite Y_k de $C(G)$, il existe une seule permutation de $C(G)$ échangeant x et y; cette permutation est une involution. En effet, s'il existe une permutation ϕ de $C(G)$ telle que $x\,\phi = y$, la permutation ψ définie par :

$$t\,\psi = \begin{cases} t\,\phi & \text{si } t \in X_i \\ t\,\phi^{-1} & \text{si } t \in X_j \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

est une involution de $C(G)$; l'existence d'une autre permutation ϕ de $C(G)$ échangeant x et y contredit la semi-régularité du groupe $C(G_i)$.

Associons alors à chaque orbite X_i de G ayant une intersection non vide avec l'orbite Y_j de $C(G)$ un point de cette intersection $x_{i,j}$. Parmi ces points, on distingue un point $x_{i_o,j}$ pour chaque orbite Y_j de $C(G)$. On note $\phi_{i,j}$ l'unique involution de $C(G)$ envoyant $x_{i_o,j}$ sur $x_{i,j}$, si elle existe.

On vérifie par le calcul que toute permutation ϕ de $C(G)$ est déterminée par la famille des permutations ϕ_{ij} pour un indice i fixé et par une famille de permutations engendrant les différents groupes $C(G_i)$. Ce résultat provient de ce que le centralisateur d'un groupe G a la structure d'un produit direct de produits en couronne de groupes.

Comme chaque $C(G_i)$ a un nombre d'éléments divisant $|X_i|$, on a déterminé une famille de générateurs du groupe $C(G)$ contenant au plus $|X|$ permutations.

PROPOSITION

Le centralisateur d'un groupe de permutations G est engendré par les permutations $\phi_{i,j}$ et les permutations des $C(G_i)$. Ce système générateur contient au plus $|X|$ permutations.

3.3. Voyons maintenant le calcul des ϕ_{ij} et des permutations des $C(G_i)$.

PROPOSITION

Etant donné un groupe (G, X, Θ) le calcul de l'involution de $C(G)$ échangeant deux orbites X_i et X_j du groupe G et fixant les autres points (resp. des permutations de $C(G)$ laissant invariant une orbite X_i et fixant les autres points) à partir de la donnée des orbites du groupe $C(G)$ se fait en temps et place $O(k|X_i|)$.

PREUVE

Si x et y sont deux points d'une même orbite de $C(G)$ appartenant à une même orbite de G (resp. deux orbites distinctes), on sait qu'il existe une seule permutation (resp. involution de $C(G)$) envoyant le point x sur le point y.

On associe au groupe (G, X, Θ) le graphe $\mathcal{G}$ défini au paragraphe 2.1. . Les composantes connexes $\mathcal{G}_i$ du graphe $\mathcal{G}$ correspondent aux orbites du groupe G.

On calcule d'abord les composantes connexes contenant x et y. Ceci se fait par un algorithme de descente opérant en un temps proportionnel au nombre de sommets et d'arcs de la composante.

On peut remarquer que si x et y sont dans deux composantes distinctes X_i et X_j, ces deux composantes ont nécessairement le même nombre de points.

L'algorithme calculera $\mathcal{G}_i$ (resp. $\mathcal{G}_i \cup \mathcal{G}_j$) en temps et place $O(k\ |X_i|)$.

On affecte à chaque sommet du graphe $\mathcal{G}_i$ (resp. $\mathcal{G}_i \cup \mathcal{G}_j$) le numéro de l'orbite de $C(G)$ auquel ce sommet appartient. Comme il existe au plus $|X_i|$ (resp. $2\ |X_i|$) orbites de $C(G)$ coupant X_i (resp. $X_i \cup X_j$), on trie l'ensemble des successeurs des différents sommets du graphe $\mathcal{G}_i$ (resp. $\mathcal{G}_i \cup \mathcal{G}_j$) en temps et place $O(k\ |X_i|)$ par un algorithme de tri lexicographique (1) utilisant le principe des tiroirs.

On calcule cette permutation ϕ en effectuant conjointement une description arborescente de $\mathcal{G}_i$ (resp. $\mathcal{G}_i \cup \mathcal{G}_j$) à partir de x et à partir de y en parcourant les successeurs des sommets suivant l'ordre croissant défini par le tri précédent.

Une description arborescente d'un graphe ayant n sommets et m arcs se faisant en temps et place $O(n + m)$ le calcul se fera en temps $O(k\ |X_i|)$.

On prolonge la permutation ϕ par la permutation identique sur $X - X_i$ (resp. $X - (X_i \cup X_j)$).

Vérifions que ϕ est une permutation de $C(G)$.

Deux successeurs d'un même sommet de $\mathcal{G}_i$ ne peuvent avoir le même numéro du fait de la semi-régularité du groupe $C(G_i)$.

Ainsi, étant donnés deux points x' et y' de X tels que $y' = x'\ \phi$, la permutation g de G définie par le chemin de $\mathcal{G}$ allant de x à x' dans l'arborescence de racine x construite par l'algorithme, est telle que $x' = x\ g$ et $y' = y\ g$.

On a donc $x\ g\ \phi = x'\ \phi = y' = y\ g = x\ \phi\ g$

Ceci est vrai quelque soient les points de l'arborescence donc

$$x\ g\ \phi = x\ \phi\ g \quad \forall\ g \in G.$$

Vu la transitivité on a finalement $x\ y\ \phi = x\ \phi\ g \quad \forall\ g \in G \quad \forall\ x \in X$ donc ϕ est un élément de $C(G)$.

3.4. Les propositions 3.2 et 3.3 permettent d'énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION

Etant donné un groupe de permutations G opérant sur un ensemble X engendré par une famille Θ de k permutations, le centralisateur du groupe G $C(G)$ dans $\mathfrak{S}_X$ est un groupe engendré par une famille de m permutations qui se calculent à partir de la donnée des orbites du groupe $C(G)$ en temps et place $O(k\ |X|^2)$.

On ne s'occupera par la suite que de la complexité du calcul des orbites du centralisateur.

4.- FAMILLES DE PERMUTATIONS ET CARTES

4.1. CARTES

La notion de carte, initialement introduite pour manipuler les représentations 2-cellulaires d'un graphe sur une surface orientée, met en évidence des liens nouveaux entre les graphes et les groupes de permutations [3, 4].

On appelle carte un triplet $C = (B, \alpha, \sigma)$ formé d'un ensemble B dont les éléments sont appelés brins et d'un couple de permutations α et σ du groupe symétrique agissant sur B $\mathfrak{S}_B$ tel que α soit une involution sans point fixe.

A toute carte C, on associe un multigraphe non orienté $H(C) = (S, A)$ appelé multigraphe sous-jacent à la carte C dont l'ensemble des sommets est en bijection avec les orbites de la permutation σ.

Soient $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$ la décomposition de σ en produit de cycles disjoints et ϕ la bijection de $\{\sigma_1 , \dots, \sigma_p\}$ sur S telle que $s_i = \sigma_i \phi \quad \forall s_i \in S$. Les arêtes du multigraphe sont définies par :

$$(s_i , s_j) \in A \quad \text{ssi} \quad \exists b \in \sigma_i , \ \exists b' \in \sigma_j \ \text{tels que} \ b \alpha = b'$$

On dit qu'une carte C est propre ssi le multigraphe sous-jacent à C $H(C)$ est un graphe.

LEMME

Une carte $C = (B, \alpha, \sigma)$ est propre ssi un couple d'orbites de σ est coupé par une orbite de α au plus.

4.2. QUELQUES PROPRIETES

Une carte est une structure algébrique tenant à la fois d'un graphe et d'un groupe de permutation.

Ainsi une carte C est dite n-connexe ssi le graphe sous-jacent $H(C)$ est n-connexe.

On remarque qu'une carte $C = (B, \alpha, \sigma)$ est connexe ssi le groupe $G = \langle \alpha , \sigma \rangle$ est transitif.

On définit de même les automorphismes d'une carte C comme étant les automorphismes du graphe sous-jacent $H(C)$ qui respectent la permutation σ des brins aux sommets. On déduit de la définition la proposition suivante :

PROPOSITION

Le groupe d'automorphismes d'une carte propre $C = (B, \alpha, \sigma)$, noté $\mathrm{Aut}(C)$, est un groupe de permutations égal au centralisateur dans $\mathfrak{S}_B$ du groupe G engendré par α et σ. $\mathrm{Aut}(C)$ est un sous-groupe normal du groupe d'automorphismes du graphe sous-jacent $H(C)$.

Les congruences d'une carte $C = (B, \alpha, \sigma)$ sont les imprimitivités du groupe $G = \langle \alpha, \sigma \rangle$.

4.3. GENRE D'UNE FAMILLE DE PERMUTATIONS

On appelle genre d'une famille de k permutations $\Theta = \{\theta_1, \dots \theta_k\}$ de $\mathfrak{S}_X$ engendrant un groupe G le nombre

$$g(\theta) = z(G) + \frac{1}{2}\left[(k-1)\ |X| - \sum_{i=1}^{k} z(\theta_i) - z(\theta_1 \dots \theta_k)\right]$$

où $z(G)$ désigne le nombre d'orbites du groupe G et $z(\phi)$ le nombre d'orbites de la permutation ϕ.

PROPOSITION [1 2]

Pour toute famille Θ de permutations, le genre de la famille $g(\Theta)$ est un entier positif ou nul.

Lorsque la famille Θ définit une carte propre C, le genre de la carte C n'est autre que le genre de la surface orientée pour laquelle la carte C définit une carte topologique [3, 4]. En particulier, une carte est planaire ssi son genre est nul.

4.4. CARTE PROPRE ASSOCIEE A UNE FAMILLE DE PERMUTATIONS

Etant donnée une famille Θ de permutations de genre g engendrant un groupe G, on peut construire une carte de même genre ayant les mêmes propriétés que la famille Θ.

4.4.1. On associe au groupe de permutations (G, X, Θ) le groupe de permutations $(\underline{G}, X \times [k], \{\alpha, \beta\})$ dont l'action est définie par :

$$(x, i)\ \alpha = (x, i+1 \bmod k)$$
$$(x, i)\ \beta = (x\ \theta_{i-1 \bmod k}, i)$$

On vérifie que

PROPOSITION

Le groupe $\underline{G}$ est transitif (resp. semi-régulier) ssi le groupe G est transitif (resp. semi-régulier).

4.4.2.

Soient I le sous-groupe du centralisateur de $\underline{G}$ dans $\mathfrak{S}_{X\times[k]}$ laissant invariant les sous-ensembles $X \times \{i\}$ et $(I, X \times \{i\})$ la restriction de l'action du groupe I au sous-ensemble $X \times \{i\}$.

PROPOSITION

Le groupe $(I, X \times \{i\})$ est équivalent au groupe $(C(G), X)$ pour tout entier i de $[k]$.

PREUVE

Soit μ l'application $C(G)$ dans $C(\underline{G})$ définie par :

$$\forall \phi \in C(G) \quad \phi\ \mu = \underline{\phi} \quad \text{avec} \quad (x, i)\ \underline{\phi} = (x\ \phi, i) \quad \forall i \in [k]$$

On constate que μ est un morphisme injectif de $C(G)$ dans $C(\underline{G})$.

Montrons que μ est une surjection de $C(G)$ sur I. Soit $\Phi \in I$, pour tout élément (x, i) de $X \times [k]$, on a :

$$(x,\ i)\ \Phi = (x',\ i)$$
$$(x,\ i)\ \Phi\ \alpha = (x',\ i + 1 \bmod k)$$
$$(x,\ i)\ \alpha\ \Phi = (x,\ i + 1 \bmod k)\ \Phi$$
$$= (x'',\ i + 1 \bmod k)$$

Comme $\alpha\ \Phi = \Phi\ \alpha$, on a nécessairement $x' = x''$; on peut donc écrire

$$(x,\ i)\ \Phi = (x . \phi,\ i) \quad \phi \in \mathfrak{S}_X$$

En utilisant le fait que $\beta\ \Phi = \Phi\ \beta$, on vérifie que ϕ est un élément de $C(G)$.

Il existe donc ϕ tel que $\phi\ \mu = \Phi$.

La bijection η de X sur $X \times \{i\}$ définie par $x\ \eta = (x,\ i)$ en association avec l'isomorphisme μ de $C(G)$ sur I nous donne l'équivalence cherchée entre les deux groupes $(C(G),\ X)$ et $(I,\ X \times \{i\})$.

4.4.3.

PROPOSITION

Le genre du couple de permutations $\{\alpha,\ \beta\}$ associé à la famille Θ est égal au genre de la famille Θ.

PREUVE

Un calcul simple montre que

$$z(\alpha) = |X| \ ; \ z(\beta) = \sum_{1}^{k} z(\theta_i) \ ; \ z(\alpha\ \beta) = z(\theta_1 \ \ldots \ \theta_k)$$

Ce calcul et la proposition 4.3.1. donnent la propriété cherchée.

4.4.4.

PROPOSITION

Le couple de permutations $\{\alpha,\ \beta\}$ associé à la famille Θ définit une carte propre lorsque la famille Θ est de cardinalité 2.

PREUVE

En effet, la permutation α est une involution sans point fixe dans ce cas là et le couple $(\alpha,\ \beta)$ vérifie le lemme 4.1.

4.4.5.

En utilisant deux fois la construction précédente, on associe au groupe de permutations $(G,\ X,\ \Theta)$ le groupe de permutations $(\underline{G},\ X \times [k] \times [2],\ \{\alpha,\ \sigma\})$ tel que la carte $(X \times [k] \times [2],\ \alpha,\ \sigma)$ qui lui est attachée possède les propriétés que nous cherchons.

PROPOSITION

A toute famille de permutations de Θ de genre g engendrant un groupe G, on peut associer une carte C propre de même genre, connexe ssi le groupe G est transitif, dont le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(C)$ admet une restriction équivalente à $C(G)$.

PREUVE

Cette proposition est un corollaire immédiat des propositions 4.4.1. à 4.4.4. qui définissent les propriétés de la construction effectuée.

4.5. CALCUL DES ORBITES DU CENTRALISATEUR D'UN GROUPE DE PERMUTATIONS

Les résultats du paragraphe précédent permettent de réduire le calcul des orbites du centralisateur du groupe (G, X, Θ) à celui des orbites du groupe d'automorphismes d'une carte propre ayant même genre que la famille de permutations Θ.

THEOREME

Les orbites du centralisateur du groupe G agissant sur X et engendré par une famille de k permutations Θ de genre g se calculent en temps et place $O(k\ |X|)$ à partir des orbites du groupe d'automorphismes de la carte propre de même genre associée par la construction du paragraphe 4.4.

PREUVE

La proposition 4.4.2. nous suggère l'algorithme à utiliser. Une fois les orbites du groupe d'automorphismes de la carte calculées, on parcourt ces orbites une à une en mettant dans une même classe les points x de X tels que les (x, i, j) correspondant pour i et j donnés, soient dans une même orbite. Ce calcul se fait bien évidemment en temps et place $O(k\ |X|)$.

5.- CALCUL DES ORBITES DU GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UNE CARTE PLANAIRE

5.1. Dans ce paragraphe, nous donnons les principaux résultats relatifs au calcul des orbites du groupe d'automorphismes de cartes planaires. Nous utilisons ces résultats pour évaluer la complexité du calcul des orbites du centralisateur d'un groupe de permutations engendré par une famille de permutations de genre nul.

5.2. La première étape du calcul utilise le fait qu'il est toujours possible de ne considérer que des cartes réunion de cartes 2-connexes. En effet, on établit la proposition suivante à partir de résultats de Hopcroft et Tarjan (9):

PROPOSITION

Le calcul des orbites du groupe d'automorphismes d'une carte $C = (B, \alpha, \sigma)$ se fait en temps et place $O(|B|)$ à partir de la donnée des orbites du groupe d'automorphismes de la carte réunion disjointe des composantes 2-connexes de la carte C.

5.3. Si la carte C est planaire, on associe à tout brin b de la carte un triplet d'entiers (t, u, v) où t (resp. u, v) est la longueur du cycle de σ (resp. $\sigma\ \alpha,\ \alpha\ \sigma$) contenant le brin b.

Nous définissons alors, comme Hopcroft et Tarjan (10), une équivalence d'indiscernabilité I_C sur les brins de la carte C par :

$$b\ I_C\ b' \text{ ssi } (t, u, v) = (t', u', v')$$

Notons $\hat{I}_C$ la congruence de la carte C la plus grossière contenue dans I_C ; $\hat{I}_C$ est la congruence d'indiscernabilité de la carte C.

THEOREME : 6

Les orbites du groupe d'automorphimes d'une carte planaire C réunion de cartes planaires 2-connexes sont égales aux classes de la congruence d'indiscernabilité de la carte C.

5.4. Le calcul des orbites du groupe d'automorphismes d'une carte planaire se réduit donc au calcul d'une partition d'imprimitivité associée à une équivalence. Il existe plusieurs algorithmes pour effectuer un tel calcul.

L'algorithme suivant calcule $\hat{I}_C$ à partir de I_C en un temps proportionnel au carré du nombre de brins de la carte C.

Soit h l'application de B dans l'ensemble des n premiers entiers positifs qui associe à chaque brin le numéro de sa classe modulo I_C. On associe à chaque brin b le mot $g(b) = b\,h \quad b\,\alpha\,h \quad b\,\sigma\,h$.

On trie les brins suivant l'ordre lexicographique sur les mots g(b) puis on affecte à chaque brin le nouvel entier $h'(b) = 1 + \text{card}\{b' ; g(b') < g(b)\}$.
S'il existe un brin pour lequel $h(b) \neq h'(b)$ on itère le calcul; sinon la partition obtenue est celle définie par $\hat{I}_C$.

Chaque itération de l'algorithme nécessite un temps proportionnel au nombre de brins de la carte C. Il y a au plus autant d'itérations que de brins de la carte C; chaque itération sépare au moins une classe en deux nouvelles classes.
L'algorithme calcule donc $\hat{I}_C$ à partir de I_C en un temps proportionnel au carré du nombre de brins de la carte.

On peut alors énoncer le théorème :

THEOREME

Il existe un algorithme effectuant le calcul d'un système de générateurs du centralisateur d'un groupe de permutations G agissant sur un ensemble X et engendré par une famille de k permutations de genre nul en temps et place $O(k\,|X|^2)$.

PREUVE

Ce théorème est un corollaire direct de la proposition 3.4. et du théorème 4.5. ainsi que de l'algorithme que nous venons d'exposer.

5.5. Le résultat précédent peut-être amélioré si on ne s'intéresse qu'au calcul des orbites du centralisateur. En effet, Hopcroft (1) a donné un algorithme calculant la partition la plus grossière contenue dans une partition donnée d'un ensemble E de cardinalité n et stable sous l'action d'une famille de k applications de E dans lui-même en temps $O(k\,n\,\log_2 n)$.

Cet algorithme permet de calculer $\hat{I}_C$ à partir de I_C en temps $O(m\,\log_2 m)$ où m est le nombre de brins de la carte C.

5.6. Il existe enfin un algorithme permettant de calculer les orbites du groupe d'automorphismes d'une famille de graphes planaires 3-connexes en un temps proportionnel au nombre de leurs sommets [7, 8, 11]. Cet algorithme, qui utilise certaines propriétés caractéristiques des cartes planaires 3-connexes fournit un algorithme de test de l'isomorphie de deux graphes planaires en temps linéaire.

Nous pouvons énoncer le résultat correspondant pour le centralisateur d'un groupe de permutations :

THEOREME

Il existe un algorithme calculant les orbites du centralisateur d'un groupe de permutations agissant sur un ensemble X et engendré par une famille de k permutations de genre nul en temps et place $O(k\,|X|)$.

Ce théorème est un corollaire du théorème 5 et de l'existence du précédent algorithme.

6.- CONCLUSION

La détermination du centralisateur d'un groupe de permutations intervient dans le calcul du groupe d'automorphismes d'un automate fini [5] ou dans les algorithmes de manipulation de groupes de permutations [13, 14].

Nous présentons pour une classe de groupes faciles à caractériser par le genre d'un système de générateurs, des algorithmes optimaux à une constante multiplicative près.

BIBLIOGRAPHIE

(1) AHO A.V., J.F. HOPCROFT, D.D. ULLMAN.- The Design and Analysis of computer Algorithms.- Addison-Wesley (1974).

(2) BERGE C.- Graphes et Hypergraphes.- Dunod (1970).

(3) CORI R.- Un code pour les graphes planaires et ses applications.- Thèse Paris (1973).

(4) EDMONDS J.R.- A combinatorial representation for oriented polyhedral surfaces M.A. Thesis University of Mouyland U.S.A. (1960)

(5) FONTET M.- Un résultat en théorie des groupes de permutations et son application au calcul effectif du groupe d'automorphismes d'un automate fini.- 2nd Colloquium on Automata, languages and programming Saarbrücker (1974) 335-341.

(6) FONTET M.- Test d'isomorphie d'hypergraphes planaires 2nd Professional Conférence on Automata Theory and Formal Languages.- Kaiserlautern (1975) 93-98.

(7) FONTET M.- Test d'isomorphie de deux graphes planaires.- Journées Informatique et Combinatoire. Bordeaux (1975)

[8] FONTET M.- A linear algorithm for testing isomorphism of planar graphs.- Third International Colloquium on Automata, Languages and Programming Edinburg Juillet 1976 .

[9] HOPCROFT J.E., R.E. TARJAN.- Isomorphism of planar graphs in complexity of Computer Computations R.E. Miller and J.W. Thatcher Eds Plenum Press New-York 131-152 (1972).

[10] HOPCROFT J.E., R.E. TARJAN.- A V log V algorithm for isomorphism of tri-connected planar graphs.- J. Comput. Syst. Sci. 7, 323-331 (1973).

[11] HOPCROFT J.E., J.K. WONG.- A linear time algorithm for isomorphism of planar graphs.- (Preliminary report). 6th ACM SIGACT (1974).

[12] JACQUES A.- Sur le genre d'une paire de substitutions.- C.R. Acad. Sci. Paris 267, 625-627 (1968).

[13] SIMS C.C.- Computational methods in the study of permutation groups.- dans J. LEECH ed. Computational problems in abstract (Pergamon Press 1970) 169-183.

[14] SIMS C.C.- Determining the Conjugacy Classes of a Permutation group.- SIAM - AMS Proceedings, vol IV, 191-195 (1971).

[15] WIELANDT H.- Finite Permutation groups Academic Press (1964).

Max FONTET
Institut de Programmation
Université Pierre et Marie Curie
75230 PARIS CEDEX 05