MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE SCHREIBER

Une caractérisation des nombres de Pisot-Salem des corps p-adiques Q_p

Mémoires de la S. M. F., tome 19 (1969), p. 55-63

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__19__55_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 19, 1969, p. 55-63.

UNE CARACTERISATION DES NOMBRES DE PISOT-SALEM DES CORPS p-ADIQUES $\mathbb{Q}_p$.

par Jean-Pierre SCHREIBER

On se propose de montrer l'existence dans le groupe additif $\mathbb{Q}_p$, d'ensembles discrets, relativement denses au sens de Bohr (c'est-à-dire rencontrant, pour un certain ℓ, toutes les boules de rayon ℓ) et sur lesquels tout caractère faible peut être uniformément approché par des restrictions de caractères continus de $\mathbb{Q}_p$. De tels ensembles ont été récemment caractérisés dans $\mathbb{R}$ par Y. Meyer ([5]). Cette caractérisation est ici étendue au cas de $\mathbb{Q}_p$, à partir d'ensembles élémentaires (cf. prop. 1) jouant le rôle des groupes discrets de $\mathbb{R}$.

On déduit ensuite une caractérisation des nombres de Pisot-Salem de $\mathbb{Q}_p$ analogue à celle donnée pour $\mathbb{R}$ dans [5].

I - NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Pour un nombre premier p, on désigne par Ω_p la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et pour x dans Ω_p, par $|x|_p$ la valeur absolue p-adique de x. Il arrivera que le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ soit désigné par Ω_0 et la valeur absolue ordinaire par $|.|_0$.

On appelle $\mathbb{Z}(p)$ l'anneau des rationnels qui s'écrivent $\frac{q}{p^r}$ où q est un entier relatif premier avec p, et E_p l'anneau des entiers p-adiques.

A tout élément x de $\mathbb{Q}_p$ sont associés de manière unique le rationnel $H_p(x) \in Z(p) \cap [0,1[$ et l'entier p-adique $\varepsilon_p(x), (|\varepsilon_p(x)|_p \leqslant 1)$, de telle sorte que

$$x = H_p(x) + \varepsilon_p(x) .$$

On notera pour $y \in [0,1[$

$$\|y\| = \inf(y , 1-y) .$$

Sur le groupe additif $\mathbb{Q}_p$, abélien, localement compact, les caractères continus sont tous de la forme

$$y \rightsquigarrow \exp[2i\pi\, H_p(xy)] ,$$

où $x \in \mathbb{Q}_p$ [[3] p.400]. Il sera pour nous plus commode de considérer les caractères comme homomorphismes de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (identifié à $[0,1[$) :

$$y \rightsquigarrow H_p(xy)$$

De même les caractères faibles sur $\mathbb{Q}_p$ sont des homomorphismes non nécessairement continus de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$y \rightsquigarrow \chi(y) .$$

II - <u>ENSEMBLES HARMONIEUX</u>.

Un fermé Λ de $\mathbb{Q}_p$ est dit harmonieux si, pour tout caractère faible χ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver x dans $\mathbb{Q}_p$ tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda \ \| \chi(\lambda) - H_p(x\lambda) \| < \varepsilon$$

Voyons maintenant l'exemple fondamental.

<u>Proposition</u> 1 : <u>L'ensemble</u> $\mathbb{Z}(p) \cap [0,1[$ <u>est harmonieux dans</u> $\mathbb{Q}_p$.

Les éléments de $\Lambda = \mathbb{Z}(p) \cap [0,1[$ sont des rationnels de la forme $\frac{q}{p^r}$, avec q entier premier avec p , $q < p^r$. Un caractère faible χ est donc déterminé, sur Λ , dès que sont fixées les valeurs

$$\theta_r = \chi\left(\frac{1}{p^r}\right) \qquad r = 0,1,\dots$$

$$\theta \leqslant \theta_r < 1 .$$

Les nombres θ_r sont liés par les relations :

$$p\,\theta_r \equiv \theta_{r-1} \pmod 1$$

ou encore
$$p\,\theta_r = \theta_{r-1} + A_r , \ a_r \in \mathbb{Z} \cap [0,p[;$$

d'où

$$\theta_r = \frac{a_r}{p} + \frac{a_{r-1}}{p^2} + \dots + \frac{a_1}{p^r} + \frac{\theta_0}{p^r} .$$

Soit x l'entier p-adique défini par

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, p^{n-1} ;$$

on a donc

$$\chi\left(\frac{1}{p^r}\right) = H_p\left(\frac{x}{p^\lambda}\right) + \frac{\theta_0}{p^r} .$$

Pour ε , $0 < \varepsilon < 1$, on peut trouver un rationnel γ de $\mathbb{Z}(p) \cap [0,1[$ vérifiant :

$$|\gamma - \theta_o| < \varepsilon .$$

En posant $y = x+\gamma$, on obtient pour l'élément $\frac{q}{p^r}$ de Λ :

$$\left\| \chi\left(\frac{q}{p^r}\right) - H_p\left(\frac{yq}{p^r}\right) \right\| \left\| \frac{\theta_o}{p^r} q - H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right) \right\| .$$

Comme $\frac{\gamma q}{p^r} \in \mathbb{Z}(p) \cap [0,1[$, $H_p\left(\frac{\gamma q}{p^r}\right) = \frac{\gamma q}{p^r}$ et $\left\| \theta_o \frac{q}{p^r} - \gamma \frac{q}{p^r} \right\| \leqslant \frac{q}{p^r} |\theta_o - \gamma| \leqslant \varepsilon$.

Le caractère fort y approche donc uniformément χ à ε près sur Λ .

<u>Corollaire</u> : Pour tout intervalle (a,b) l'ensemble $\mathbb{Z}(p) \cap (a,b)$ est harmonieux dans $\mathbb{Q}_p$.

<u>Proposition</u> 2 : Soit M un $\mathbb{Z}(p)$ module de type fini, contenu dans $\mathbb{Q}_p$, et soit $s_1,\ldots,s_n$, une base de M . On suppose qu'on a n applications $\mathbb{Z}(p)$-linéaires $L_1^o, L_2^o, \ldots, L_n^o$ de M dans $\mathbb{R}$, indépendantes sur $\mathbb{R}$, et d'autre part n applications $\mathbb{Z}(p)$ linéaires $L_1^p, L_2^p, \ldots, L_n^p$ de M dans $\mathbb{Q}_p$, indépendantes sur $\mathbb{Q}_p$; L_1^p est l'injection canonique de M dans $\mathbb{Q}_p$.

Soit Λ l'ensemble des λ de M vérifiant

$$|L_i^o(\lambda)|_o \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,\ldots n$$

$$\text{et} \quad |L_i^p(\lambda)|_p \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad i = 2,3,\ldots n .$$

Alors Λ est harmonieux dans Q_p .

<u>Démonstration</u> : Les éléments de Λ sont de la forme :

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) s_i \qquad a_i(\lambda) \in \mathbb{Z}(p)$$

Les applications L_i^o étant indépendantes sur $\mathbb{R}$, définissent un homéomorphisme de $[Z(p)]^n$ (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}^n$ et on a donc une constante A telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|a_i(\lambda)|_o < A$.

Soit χ un caractère faible sur Λ et ε un nombre réel positif. Il résulte du corollaire de la proposition 1 que pour chaque k , $k = 1,2\ldots n$,

$$\{a_j \, s_k \; ; \; a_j \in Z(p) \cap]-A,A[\}$$

est harmonieux ; on peut donc trouver $x_k \in \mathbb{Q}_p$ tel que

$$\| \chi(a_k\ s_k) - H_p(x_k\ a_k\ s_k) \| < \frac{\varepsilon}{2n}\ ,\ \forall a_k \in \mathbb{Z}(p) \cap]-A,A[\ .$$

On est alors ramené à l'approximation uniforme sur Λ du caractère faible

$$\lambda \rightsquigarrow H_p(\sum_{k=1}^{n} x_k\ a_k(\lambda) s_k)$$

par un caractère fort du type

$$\lambda \rightsquigarrow H_p(x \sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda) s_k)\ .$$

Si $\xi_2,\xi_3,\dots\xi_n$ sont des entiers p-adiques et si $\lambda \in \Lambda$, $H_p(\xi_j\ L_j^p(\lambda)) = 0$ pour $j = 2,\dots,n$. Par conséquent, si nous posons

$$L_j^p(s_k) = t_{j,k}\ ,$$

il nous suffit de trouver $x \in \mathbb{Q}_p$ et $\xi_2,\dots,\xi_n$, entiers p-adiques, de façon que $\forall k\ ,\ \forall \lambda \in \Lambda\ ,\ \| H_p[a_k(\lambda)(x_k\ s_k - xs_k - \sum_{j=2}^{n} \xi_j\ t_{j,k})] \| < \frac{\varepsilon}{2n}$,

pour avoir pour tout λ de Λ

$$\| H_p(x\lambda) - \chi(\lambda) \| < \varepsilon\ .$$

Comme $a_k(\lambda) \in Z(p) \cap]-A,A[$, il nous suffit donc de trouver $x,\xi_2,\dots\xi_n$, de manière que

$$\forall k\ ,\ c_k = x_k\ s_k - xs_k - \sum_{j=2}^{n} \xi_j\ t_{j,k} \in Z(p)\quad]-p^{-c}, p^{-c}[\ ,$$

$$\text{avec } p^{-c} < \frac{1}{A}\,\frac{\varepsilon}{2n}\ .$$

Ecrivons plutôt, après avoir posé $x = x' + \xi_1$,

$$c_k = x_k\ s_k - x'\ s_k - \xi_1\ s_k - \sum_{j=2}^{n} \xi_j\ t_{j,k}\ .$$

On est alors ramené à la résolution en x', c_k, b_k du système

$$(*)\qquad x'\ s_k = x_k\ s_k - c_k - b_k \quad k = 1,2\dots n\ .$$

$$\text{avec}\ \left|\begin{array}{l} x' \in \mathbb{Q}_p \\ c_k \in \mathbb{Z}(p) \cap]-p^{-c}, p^{-c}[\\ b_k \in p^B\ E_p \quad k = 1,2\dots n\ . \end{array}\right.$$

B étant une constante entière telle que pour $b_1,b_2,\dots,b_n$ dans $p^B E_p$, on puisse trouver $\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n$, dans E_p , avec

$$b_k = \xi_1\ s_k + \sum_{j=2}^{n} \xi_j\ t_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\ L_j^p(s_k)\ .$$

L'existence d'une telle constante résulte de l'indépendance des L_j^p .

L'existence d'une solution au système $(*)$ va résulter du lemme suivant, qui est le théorème de Kronecker [[7] 5.1.3] appliqué à $\mathbb{Q}_p$:

Lemme : Si $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des éléments de $\mathbb{Q}_p$ indépendants sur $\mathbb{Q}$, l'ensemble des n-uples $\{H_p(x\, p_k)\}_{k=1,2,\dots,n}$, x décrivant $\mathbb{Q}_p$, est dense dans $[0,1[^n$.

Soit alors $x' \in \mathbb{Q}_p$ tel que

$$|H_p(x'\, p^{-B}\, s_k) - H_p(x_k\, s_k\, p^{-B})| < p^{-B-c} .$$

Posons

$$H_p(x_k\, s_k\, p^{-B}) - H_p(x'\, s_k\, p^{-B}) = c_k\, p^{-B}$$

$$\varepsilon_p(x_k\, s_k\, p^{-B}) - \varepsilon_p(x'\, s_k\, p^{-B}) = b_k\, p^{-B}$$

alors c_k appartient à $Z(p) \cap]-p^{-c}, p^{-c}[$, b_k appartient à $p^B E_p$, et en ajoutant on trouve

$$x_k\, s_k - x'\, s_k = b_k + c_k .$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.

On peut énoncer pour les ensembles harmonieux de $\mathbb{Q}_p$ une caractérisation identique à celle donnée dans [5] pour le cas réel, la démonstration de [5],th.1, valant pour tous les groupes localement compact métrisables :

Proposition 3 : Si Λ est un fermé de $\mathbb{Q}_p$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Λ est harmonieux.

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T > 0$, χ caractère faible sur Λ, $\exists x \in \mathbb{Q}_p$

$$|x|_p \leqslant T \quad \text{et} \quad \|\chi(\lambda) - H_p(x\lambda)\| < \varepsilon .$$

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T > 0$ tel que l'ensemble $E(\Lambda, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{Q}_p, \|H_p(x\lambda)\| < \varepsilon\}$ rencontre tout disque de rayon supérieur à T.

III - NOMBRES DE PISOT-SALEM DANS $\mathbb{Q}_p$.

De nombreuses propriétés des nombres de Pisot réels ont été étendues au cas p-adiques : cf. par exemple [2], [6] et [1]. Nous définirons l'ensemble des nombres de Pisot-Salem de $\mathbb{Q}_p$ comme suit :

<u>Définition</u> : Soit T_p l'ensemble des éléments θ de $\mathbb{Q}_p$, $|\theta|_p > 1$, tels qu'il existe un polynôme $A[x]$ à coefficients entiers relatifs, irréductible sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant :

1) La seule racine de A dans Ω_p ayant une valeur absolue p-adique strictement supérieure à 1 est θ .

2) Pour tout nombre premier p' différent de p et pour $p' = 0$, les racines de A dans $\Omega_{p'}$ (resp. dans C) sont de valeur absolue p' adique (resp. valeur absolue ordinaire) inférieure ou égale à 1.

<u>Théorème</u> 1 : <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre p-adique</u> θ <u>appartienne à</u> T_p <u>est que l'ensemble</u> $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ <u>soit harmonieux.</u>

a) Soit $\theta \in T_p$.

Rappelons d'abord que les conditions 1) et 2) entraînent qu'on peut prendre A sous la forme

$$A(x) = p^r x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \; ; \; a_m \neq 0 \; .$$

(cf.[1] , II 1.2).

Il en résulte que l'ensemble $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartient au $\mathbb{Z}(p)$-module engendré par $1, \theta, \dots \theta^{m-1}$. Soit M ce $\mathbb{Z}(p)$-module. Construisons les applications L_j^p et L_j^o de la proposition 3.

Soient $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_m$ les m $\mathbb{Q}$-isomorphismes du corps $\mathbb{Q}(\theta)$ (dans lequel M est plongé), à valeurs dans Ω_p , τ_1 étant l'injection canonique. En posant $\tau_j(\theta) = \theta_j$, racine de A dans Ω_p , on a par hypothèse $|\theta_j|_p \leqslant 1$ pour $j \geqslant 2$.

Dans $(\Omega_p)^m$ les m vecteurs $v_o, v_1, \dots v_{m-1}$:

$$v_k = \{\theta^k, \theta_2^k, \dots, \theta_m^k\}$$

sont indépendants sur Ω_p , (le déterminant du système des v_k sur la base canonique de $(\Omega_p)^m$ étant non nul) donc sont indépendants sur $\mathbb{Q}_p$. Les projections v'_k des v_k sur $(\Omega_p)^{m-1}$

$$v'_k = \{\theta_2^k, \dots, \theta_m^k\}$$

forment un système, de rang $m-1$, de vecteurs contenus dans la boule unité de $(\Omega_p)^{m-1}$, puisque $|\theta_j|_p \leqslant 1$ si $2 \leqslant j \leqslant m$. Il est donc possible de définir, sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel N engendré par $v_0, v_1, \dots v_{m-1}$, m formes $\mathbb{Q}_p$-linéaires à valeur dans $\mathbb{Q}_p$, $L'_1, L'_2, \dots, L'_m$, qui soient $\mathbb{Q}_p$-indépendantes et telles que : $L'_1(v_k) = \theta^k$ et, pour $j=2,\dots,m$, $|L'_j(x)|_p \leqslant p$ pour tous les éléments x de N dont les $m-1$ dernières coordonnées sur la base canonique de $(\Omega_p)^m$ ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Soit alors τ l'application $\mathbb{Z}(p)$-linéaire de M dans N définie par

$$\tau(\theta^k) = v_k .$$

On obtient m applications $\mathbb{Q}_p$-indépendantes et $\mathbb{Z}(p)$-linéaires de M dans $\mathbb{Q}_p$ en posant :

$$L_j^p = L'_j \circ \tau ,$$

et ces applications vérifient pour tout λ de l'ensemble $\Lambda = \{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$L_1^p(\lambda) = \lambda \quad \text{et} \quad |L_j^p(\lambda)|_p \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad p=2,\dots,m .$$

Soient maintenant $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$, les m $\mathbb{Q}$-isomorphismes du corps $\mathbb{Q}(\theta)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit alors, dans $\mathbb{C}^m$, comme précédemment dans $(\Omega_p)^m$, m vecteurs indépendants sur le corps des réels $\mathbb{R}$ et situés tous, cette fois, dans la boule unité de $\mathbb{C}^m$. On en déduit donc m applications $\mathbb{Z}(p)$-linéaires et $\mathbb{R}$-indépendantes de Λ dans $\mathbb{R}$: $L_1^o, \dots, L_m^o$, telles que

$$\forall\lambda \in \Lambda \quad |L_j^o(\lambda)|_o \leqslant 1 .$$

La proposition 3 s'applique alors, et montre que Λ est contenu dans un ensemble harmonieux, donc harmonieux.

b) Si $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est harmonieux, θ est algébrique.

En effet, si θ est transcendant, l'ensemble $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendant sur $\mathbb{Q}$ et toute suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant \alpha_n < 1$, définit dessus un caractère faible. On montre alors comme dans le cas réel ([5] 3.3) que $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être harmonieux : pour ε assez petit, l'ensemble K_ε des éléments x de $\mathbb{Q}_p$ vérifiant pour tout $n \geqslant 0$: $H_p(x\theta^n) \in [0,\varepsilon[\cup]\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+[\cup]1-\varepsilon,1[$, a tous ses points isolés et est donc au plus dénombrable, alors que l'ensemble des suites $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prenant les valeurs 0 ou $\frac{1}{2}$ a la puissance du continu ; on ne peut donc pas approcher à ε près toutes ces suites $\{\alpha_n\}$ par des suites $H_p(x\theta^n)$.

c) Si θ est racine du polynôme $P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ de $\mathbb{Z}[x]$, irréductible et primitif et si l'ensemble $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est harmonieux, on peut trouver, pour $\varepsilon > 0$, un x de $\mathbb{Q}_p$ tel que

$$\|H_p(x\theta^n)\| < \varepsilon \ , \quad \text{et} \quad x \neq 0 \ .$$

Si nous considérons plutôt la décomposition des éléments y de $\mathbb{Q}_p$ de la forme

$$y = H'_p(y) + \varepsilon'_p(y) \ , \quad \text{avec} \quad H'_p(y) \in \mathbb{Z}(p) \cap [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}[$$

et $|\varepsilon'_p(y)|_p \leqslant 1$, nous aurons

$$|H'_p(x\theta^n)|_0 < \varepsilon \ .$$

Prenons alors $\varepsilon < (\sum_{i=0}^{m} |a_i|)^{-1}$. Dans l'égalité

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \, H'_p(x\theta^{k+m-i}) = \sum_{i=0}^{m} a_i \, \varepsilon'_p(x\theta^{k+m-i})$$

le membre de droite est un entier p-adique et le membre de gauche un rationnel de $\mathbb{Z}(p) \cap]-1,1[$; ces deux membres sont donc nuls. Les rationnels $u_n = H'_p(x\theta^n)$ vérifient ainsi la même relation de récurrence que θ^n et comme on a

$$|u_n|_p \leqslant |x|_p \, |\theta^n|_p \ ,$$

pour un entier r assez grand on aura $p^{rn} u_n \in \mathbb{Z}$. Alors le théorème de Fatou [[4] p.64], appliqué à la série $\sum_{n=0}^{\infty} p^{rn} u_n \left(\frac{z}{p^r}\right)^n$, nous permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \, z^n = \frac{A(z)}{B(z)}$$

où A et B sont des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ premiers entre eux.

Pour tout nombre premier p' différent de p et pour $p' = 0$, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ converge dans le disque $|z|_{p'} < 1$ puisque $|u_n|_{p'} \leqslant 1$ ($u_n \in \mathbb{Z}(p) \cap [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$). Donc dans $\Omega_{p'}$ les racines de B sont de valeur absolue supérieure ou égale à 1. Dans Ω_p, comme on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n \, z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} x\theta^n \, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x\theta^n) z^n \\ &= \frac{x}{1-\theta z} - g(z)\end{aligned}$$

où $g(z)$ est définie pour tout z , $|z|_p < 1$ (puisque $|\varepsilon'_p(x\theta^n)|_p \leqslant 1$) , les racines de B autres que $\frac{1}{\theta}$ ont une valeur absolue p-adique supérieure ou égale à 1. Alors θ appartient bien à la classe T_p .

Cela termine la démonstration du théorème.

Références

[1] BERTRANDIAS (F.). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques. - Thèse. - Bull. Soc. Math. France, Mémoire n°4 (1965).

[2] CHABAUTY (C.). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques. - C. R. Acad. Sc. Paris, t.231 (1950) p. 465-466.

[3] HEWITT and ROSS. - Abstract harmonic analysis I. - Springer.

[4] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1963).

[5] MEYER (Y.). - Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique. - à paraître.

[6] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal (1963).

[7] RUDIN (W.). - Fourier analysis on groups. - Interscience (1962).

Jean-Pierre SCHREIBER
Institut de Mathématique
Faculté des Sciences d'Orsay
91 - ORSAY (France)

Joseph FLOCH, Maitre-Imprimeur à Mayenne - 20-2-1970 - n°3654