JEAN-PIERRE DEDIEU

Cônes asymptotes d’ensembles non convexes

Mémoires de la S. M. F., tome 60 (1979), p. 31-44
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__31_0>

Analyse non convexe [*1977. Pau*]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 60, 1979, p. 31-44.

CONES ASYMPTOTES D'ENSEMBLES NON CONVEXES

Jean-Pierre DEDIEU

INTRODUCTION.

Le cône asymptote d'une partie convexe fermée et non vide A d'un evt E est défini traditionnellement par

$$A_\infty = \bigcap_{\lambda>0} \lambda(A-x_0)$$

où x_0 est un point quelconque de A([3] et [4]).

Si l'on désigne par C(A) le cône dans $E \times \mathbb{R}$ de sommet 0 et engendré par $A \times \{1\}$, on peut montrer que $\overline{C(A)} = C(A) \cup (A_\infty \times \{0\})$ ([4] et [6]) de sorte que A_∞ apparaît comme l'ensemble qu'il faut rajouter à C(A) pour en faire un fermé.
La même démarche mais avec un ensemble A qui n'est plus convexe nous conduit à définir le cône asymptote d'un fermé quelconque et on aura

$$A_\infty = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{]0,\varepsilon]A}.$$

On prouvera qu'en rajoutant $A_\infty \times \{0\}$ à C(A) on obtient précisément un ensemble fermé.
L'intérêt de la notion de cône asymptote et son utilisation en analyse convexe est connue depuis longtemps : fonctions spline ([1]), inf-convolution ([8] et [9]) et de façon plus essentielle le théorème de Dieudonné ([5]) sur la fermeture de la somme de deux convexes.

On verra que pour une classe importante d'ensembles (appelés rayonnants) qui contient les ensembles convexes, les résultats du cas convexe sont toujours valables (§ 2). En particulier on montrera que le théorème de Dieudonné cité ci-dessus reste encore vrai pour les ensembles rayonnants et non convexes.

Cela nous permettra ensuite d'étudier l'existence de solutions de problèmes de minimisation à contraintes non convexes.

Citons enfin une autre tentative de généralisation du cône asymptote à un cas non convexe :
Dans [2], J. Bair définit

$$A_\infty = \bigcup_{a\in {}^bA} \bigcap_{\lambda>0} \lambda({}^bA-a)$$

où ${}^bA$ est la réunion de A et des points x tels qu'il existe $y \neq x$ avec $[y:x[\subset A$.

Cette notion purement algébrique, comme le précise l'auteur, ne prend pas en compte les asymptotes que l'on ne peut atteindre que par une opération de fermeture (cf. exemple 1.4.2). Elle perd ainsi toute efficacité dans les cas suffisamment non convexes.

Je tiens à remercier J.P. Penot pour les améliorations qu'il m'a permis d'apporter à ce papier.

1 - DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES.

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$.

1.1 Définition.

On appelle cône asymptote d'une partie fermée et non vide A de E l'ensemble

$$A_\infty = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{]0,\varepsilon]A}.$$

Rappelons que $]0,\varepsilon]\,A$ est l'ensemble des points λa avec $\lambda \in]0,\varepsilon]$ et $a \in A$.

On voit aisément que A_∞ est un cône fermé de sommet 0.

Si E est métrisable, $v \in A_\infty$ si et seulement si il existe des suites (a_n), (t_n) de A et $\mathbb{R}_+$ avec $\lim t_n = +\infty$, $\lim t_n^{-1} a_n = v$.

Dans le cas général, on peut utiliser des fuites (suites généralisées).

1.2 Propriété caractéristique.

1.2.1 Définition : A toute partie A de E on associe dans $E \times R$, le cône $C(A)$ épointé de sommet 0 et engendré par $A \times \{1\}$.

Ainsi $C(A) = \bigcup_{\lambda>0} \lambda(A \times \{1\})$ et $(y, \mu) \in C(A)$ si et seulement si $\mu > 0$ et $y/\mu \in A$.

Dans le cas convexe (voir [3], [4] ou [6]) on a $\overline{C(A)} = C(A) \cup (A_\infty \times \{0\})$ de sorte que $A_\infty \times \{0\} = \overline{C(A)} \cap (E \times \{0\})$.

On a ici une propriété identique :

1.2.2 Proposition : Si A est une partie fermée et non vide de E l'adhérence $\overline{C(A)}$ de $C(A)$ est $C(A) \cup (A_\infty \times \{0\})$.

Preuve : Si $(x_0, \lambda_0) \in \overline{C(A)}$ avec $\lambda_0 > 0$, on va montrer que $(x_0, \lambda_0) \in C(A)$. Par homothétie, on peut supposer que $\lambda_0 = 1$. Soit V un voisinage de x_0 dans E. L'ensemble $W = [1-\varepsilon, 1+\varepsilon](V \times \{1\})$, $0<\varepsilon<1$, est un voisinage de $(x_0, 1)$ dans $E \times \mathbb{R}$.

Il contient donc un point de $C(A)$, à savoir (x, λ).

On en déduit que $x/\lambda \in V \cap A$, ce qui montre que x_0 est un point adhérent à A.

Comme A est fermé, $x_0 \in A$ donc $(x_0, 1) \in C(A)$.

De ce qui précède, il résulte que

$$\overline{C(A)} = C(A) \cup (\overline{C(A)} \cap (E \times \{0\})).$$

Il nous faut donc prouver que

$$A_\infty \times \{0\} = \overline{C(A)} \cap (E \times \{0\}).$$

Soit $(x_0, 0) \in \overline{C(A)} \cap (E \times \{0\})$. Pour tout voisinage U de 0 dans E et $\varepsilon > 0$, il existe un point de C(A) contenu dans $(U + x_0) \times [0, \varepsilon]$: il existe $(x,\lambda) \in C(A)$ avec $x \in U + x_0$ et $0 < \lambda \leq \varepsilon$.

On a $x_0 \in x - U$, $x \in \lambda A$ et $0 < \lambda \leq \varepsilon$ d'où

$$x_0 \in]0,\varepsilon] A - U.$$

Comme cela est vrai pour tout voisinage U de 0,

$$x_0 \in \overline{]0,\varepsilon].A},$$

et ε étant quelconque, on a $x_0 \in A_\infty$.

Soit $x_0 \in A_\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \overline{]0,\varepsilon]\ A}$, c'est-à-dire que pour tout voisinage U de zéro dans E, on a :

$$(x_0 + U) \cap]0, \varepsilon]\ A \neq \emptyset.$$

Ainsi il existe $y \in A$ et $\lambda \in]0,\varepsilon]$ tels que $x_0 \in \lambda y - U$.

On a $\lambda y \in U + x_0$, $0 < \lambda \leq \varepsilon$ et $(\lambda y, \lambda) \in C(A)$ de sorte que $((U + x_0) \times [0,\varepsilon]) \cap C(A) \neq \emptyset$ ce qui prouve que $(x_0, 0) \in \overline{C(A)} \cap (E \times \{0\})$.

1.3 <u>Premières propriétés</u>.

Les propriétés qui suivent permettent de se faire une idée précise de ce que sont les asymptotes d'un ensemble fermé.

1.3.1 A_∞ est un cône fermé de sommet 0 et si $B = A + c$ est un translaté de A, alors $B_\infty = A_\infty$.

1.3.2 Si A est un cône fermé de sommet 0, alors $A_\infty = A$. En particulier $(A_\infty)_\infty = A_\infty$.

1.3.3 Si A est convexe, fermé et non vide, on retrouve la définition habituelle.

La démonstration sera faite au paragraphe 2 à propos des ensembles rayonnants.

1.3.4 Si A est une partie fermée et non vide de E, on a $\overline{co}(A_\infty) \subseteq (\overline{co}A)_\infty$.

1.3.5 Si A est une partie fermée, bornée et non vide d'un e.v.t. séparé E alors $A_\infty = \{0\}$.

En effet, A va être absorbé par tout voisinage de 0, de sorte que A_∞ sera contenu dans l'intersection des voisinages de zéro.

1.3.6 Si A est fermé et s'il existe $x_0 \in A$ pour lequel l'intersection de $\{x_0 + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$ et de A n'est pas bornée, alors $y \in A_\infty$. En particulier A_∞ contient les directions des demi-droites contenues dans A.

En effet, pour tout $M>0$, il existe $\lambda \geq M$ tel que $x_0 + \lambda y \in A$. Soient U un voisinage de 0 et $\varepsilon > 0$; pour $M>0$ vérifiant $M^{-1} \leq \varepsilon$ et $[0, M^{-1}].\ x_0 \subset U$ on a, d'après ce qui précède, $y \in]0,\varepsilon] A - U$.

Cela étant vrai pour tout U, $y \in \overline{]0, \varepsilon]A}$ aussi $y \in A_\infty$.

1.3.7 Si A est une partie fermée et non vide de E et s'il existe $x_o \in A$ pour lequel $A_\infty \subseteq A - x_o$, alors $A_\infty = \bigcap_{\lambda>0} \lambda(A-x_o)$.

Soit $B = \bigcap_{\lambda>0} \lambda(A-x_o)$; $y \in B$ si et seulement si $x_o + \lambda y \in A$ pour tout $\lambda > 0$. La proposition 1.3.6. montre que $B \subseteq A_\infty$.

Comme $A_\infty \subseteq A-x_o$ et que A_∞ est un cône de sommet 0 on a $A_\infty \subseteq \bigcap_{\lambda>0}\lambda(A-x_o)$ donc $A_\infty \subseteq B$.

1.4 Exemples.

1.4.1 Asymptotes à un graphe.

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. S'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, alors $(1, a) \in G(f)_\infty$ où $G(f)$ est le graphe de f dans $\mathbb{R}^2$.

Soit (x_n) une suite de réels > 0 qui converge vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon>0$, si n est suffisamment grand, $x_n^{-1}(x_n, f(x_n)) \in]0,\varepsilon[G(f)$ et lorsque $n \to \infty$, $x_n^{-1}(x_n, f(x_n)) \to (1,a)$.

1.4.2 Tout translaté de A_∞ peut avoir avec une intersection vide ou réduite à un point (contrairement au cas convexe).

C'est le cas, par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ pour

$$A = \{(x, e^x) \mid x \leqslant 0\} \text{ puisque } A_\infty = \{0\} \times \mathbb{R}_-.$$

1.4.3 A et A_∞ peuvent être saillants sans que $\overline{co}A$ le soit (un ensemble est saillant s'il ne contient pas de droite).
C'est le cas dans $\mathbb{R}^2$ pour le cône de sommet 0 engendré par les points (0, -1), (1, 1) et (1, -1).

2 - ASYMPTOTES DES ENSEMBLES RAYONNANTS.

Les ensembles rayonnants forment une classe d'ensemble non convexes pour lesquels certaines propriétés des ensembles convexes sont conservées : leurs asymptotes sont les directions des demi-droites qu'ils contiennent.
On en déduira un théorème de fermeture de la somme de deux ensembles.

Dans ce paragraphe E est toujours un e.v.t réel.

2.1.1 Définition : Une partie A de E est dite étoilée s'il existe $x_o \in A$ pour lequel $x_o + \theta(x-x_o) \in A$ pour tout $x \in A$ et tout $\theta \in [0, 1]$. On dira aussi que A est étoilée en x_o.

2.1.2 Définition : Une partie A de E est dite rayonnante s'il existe $x_o \in A$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ pour lesquels $x_o + \theta(x-x_o) \in A$ pour tout $x \in A$ et tout $\theta \in [0,\varepsilon]$. On dira aussi que A est rayonnante en x_o.

2.1.3 Exemples.

Les ensembles convexes et plus généralement les ensembles étoilés sont rayonnants. Un cône pointé de sommet x_o est étoilé en x_o donc rayonnant en x_o.

Un borné possédant un point intérieur est rayonnant (ce cas ne représente que si E est normable bien sur).

2.2 Cône asymptote d'un ensemble rayonnant.

Proposition : Si A est une partie de E fermée, non vide et rayonnante en x_o alors

$$A_\infty \subset A - x_o,$$

de sorte que $A_\infty = \bigcap_{\lambda>0} \lambda(A-x_o)$.

Preuve : Soit $\varepsilon_o \in \left]0, 1\right]$ pour lequel $x_o + \theta(x-x_o) \in A$ quels que soient $x \in A$ et $\theta \in [0, \varepsilon_o]$.

Si $x \notin A - x_o$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de zéro dans E tel que $(\mathcal{U} + x) \cap (A - x_o) = \emptyset$.

Pour tout $u \in \mathcal{U}$ et $a \in A$ on a :

(1) $u + x - a + x_o \neq 0.$

Soit V un voisinage de 0 contenu dans $\mathcal{U}$ tel que $V + V \subset \mathcal{U}$ et soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon_o$, $[-\varepsilon, \varepsilon] . x_o \subset V$.

Pour tout $v \in V$, $\alpha \in \left]0, \varepsilon\right[$ et $a \in A$ on a

(2) $v + x - \alpha a \neq 0$;

en effet, si $v + x - \alpha a = 0$, on a aussi $(v - \alpha x_o) + x - \alpha(a-x_o) = 0$; or $v - \alpha x_o \in \mathcal{U}$ et comme A est rayonnant en x_o, $\alpha(a-x_o) \in A - x_o$ ce qui contredit (1).

De (2) on déduit que $x \in \left]0,\varepsilon\right] A-V$ donc $(x+V) \cap \left]0,\varepsilon\right] A = \emptyset$ ce qui prouve que $x \notin A_\infty$.

Remarque. Cette démonstration est applicable lorsque A est convexe, ce qui prouve bien que notre définition des asymptotes généralise celle que l'on connaît pour les ensembles convexes.

2.3 Fermeture de la somme de deux ensembles rayonnants.

Dieudionné a montré ([5]) que pour deux ensembles convexes et fermés A et B dont l'un est localement compact une condition suffisante pour que A-B soit fermé est que $A_\infty \cap B_\infty = \{0\}$.

Sa démonstration a le mérite de ne pas utiliser la convexité de A et B mais seule-

ment le fait que A et B sont étoilés.
A l'aide du formalisme précédemment établi et en adaptant (à peine !) cette démonstration on va établir un résultat identique pour des ensembles A et B rayonnants.

2.3.1 Théorème :
Soient A et B des ensembles rayonnants, fermés, non vides dont l'un au moins est localement compact.
Si $A_\infty \cap B_\infty = \{0\}$ alors A - B est fermé.
On montre tout d'abord le lemme suivant.

2.3.2 Lemme :
Soit A un ensemble fermé, localement compact et non compact, rayonnant en a, et n_o un entier > 0 pour lequel $x \in A$ et $\theta \in [0, n_o^{-1}]$ implique $a + \theta(x-a) \in A$. Soit W un voisinage fermé, équilibré et absorbant de 0 dans E, tel que $A \cap (a + W)$ soit compact.
Soit $\mathcal{G}$ la base de filtre sur A formée des ensembles $A \cap \complement(a + nW)$, $n \geqslant n_o$, et soit $\mathcal{F}$ un filtre plus fin que le filtre de base $\mathcal{G}$. Pour tout ensemble $N \in \mathcal{F}$, soit $\hat{c}(N)$ le cône de sommet a engendré par N ; alors il existe une demi-droite d'origine a, contenue dans $a + A_\infty$, et contenue dans l'adhérence de chacun des cônes $\hat{c}(N)$.

Preuve : On va supposer pour simplifier que a = 0.
Puisque A est rayonnant et W équilibré, on a $A \cap n\,W \subset n(W\ \ A)$ pour tout $n \geqslant n_o$, donc $A \cap nW$ est relativement compact si $n \geqslant n_o$ et l'hypothèse A non compact entraîne bien que $\mathcal{G}$ est une base de filtre. Soit d'autre part K l'intersection de $A \cap W$ et du complémentaire de l'intérieur de 1/2 W ; K est évidemment compact. Toute demi-droite d'origine 0 contenant un point de $A \cap \complement(nW)$, $n \geqslant n_o$, contient un point de K, donc les ensembles $\hat{c}(N) \cap K$ forment une base de filtre sur K, qui a par suite un point adhérent $x_o \in K$, donc $x_o \neq 0$. Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, x_o est adhérent à tous les $\hat{c}(N) \cap nW$, $n > \lambda$, $n \geqslant n_o$ et $N \subset A \cap \complement(nW)$; comme $n_o^{-1}(\hat{c}(N) \cap nW)$ est contenu dans A, on a $n_o^{-1}.\lambda x_o \in A$ et la demi-droite d'origine 0 passant par x_o répond à la question.

Preuve du Théorème :

La proposition est classique lorsque A est compact, on peut donc supposer A non compact et garder les notations du lemme.
On supposera aussi que B est rayonnant en b et que $b+\theta(y-b) \in B$ pour tout $y \in B$ et $\theta \in [0, n_1^{-1}]$, où n_1 est un entier > 0.

Soit c un point adhérent à B-A ; pour tout voisinage équilibré V de 0 dans E, l'ensemble M_V des $x \in A$ tels que $(c+x+V) \cap B \neq \emptyset$ n'est pas vide, et les M_V forment une base de filtre $\mathcal{M}$ sur A. Si l'un au moins des M_V est relativement compact, $\mathcal{M}$ admet un point adhérent $x_o \in A$ et on a $c+x_o \in B + 2V$ pour tout voisinage V de zéro, donc $c \in B-A$. Supposons donc qu'aucun des M_V ne soit relativement compact de sorte que pour tout V et tout entier $n \geq n_o$,

$P_{V,n} = M_V \cap A \cap \complement(a + nW)$ n'est pas vide.

Les $P_{V,n}$ forment la base d'un filtre $\mathcal{K}$ auquel on peut appliquer le lemme ; il y a donc une demi-droite D d'origine a contenue dans l'adhérence de chacun des cônes $\hat{c}(P_{V,n})$. Nous allons voir que la demi-droite $D' = (b-a) + D$ d'origine b est contenue dans B, et ceci achèvera la démonstration. Soit donc z tel que $a+z \in D$ et prouvons que $b + z \in B$. Soit k un entier tel que $a + z$ soit intérieur à $a + kW$. Pour tout voisinage V de 0 et pour tout entier $n \geq n_o$, il existe $\lambda > 0$ et $v \in V$ tels que $x = a + \lambda(z+v) \in P_{V,n}$ et que $a + z + v$ soit contenu dans $a + kW$; on a donc par définition $\lambda \geq n/k$. D'autre part, par hypothèse on peut écrire $x = y-c+v'$ avec $y \in B$ et $v' \in V$; par suite on a :

$$b+z = b + \lambda^{-1}(y - b) + \lambda^{-1}(b - a - c) + \lambda^{-1} v' - v.$$

Or, pour $n \geq n_1 k$, $n \geq n_o$ on a $\lambda^{-1} \leq n_1^{-1}$ aussi $b + \lambda^{-1}(y-b) \in B$; on peut d'autre part prendre n assez grand pour que $\lambda^{-1}(b-a-c) \in V$; comme $\lambda^{-1} v \in V$, on a finalement $b + z \in B + 3V$; comme V est arbitraire et que B est fermé, cela entraîne bien $b + z \in B$.

Ce théorème s'écrit de façon plus simple dans le cas où A et B sont des cônes.

2.3.3 Corollaire : Soient A et B deux cônes fermés de sommet 0 dont l'un est localement compact. Si $A \cap B = \{0\}$, alors A-B est fermé.

En effet A et B sont étoilés en 0, $A_\infty = A$ et $B_\infty = B$ de sorte que les hypothèses du théorème sont satisfaites.

On peut donc, dans l'énoncé du théorème, supposer que $A_\infty \cap B_\infty$ est un espace vectoriel.

2.3.4 Corollaire : Soient A et B deux ensembles rayonnants, non vides et fermés dont l'un au moins est localement compact.

Si $A_\infty \cap B_\infty$ est un espace vectoriel W et si A et B sont saturés pour W($A+W \subset A$ et $B+W \subset B$) alors A-B est fermé.

Preuve : Soient F le quotient de E par W et p la surjection canonique. On muni F de la topologie quotient qui est séparée, W étant fermé. Il est clair que p(A) et p(B) sont rayonnants, non vides et fermés puisqu'ils sont saturés pour W.

Si l'on suppose A localement compact, p(A) est localement compact dans F.

De plus A_∞ et B_∞ sont saturés par W : si par exemple A est rayonnant en x_o, soient $y \in A_\infty$ et $w \in W$. On a $x_o + \lambda y \in A$ pour tout $\lambda > o$, donc $x_o + \lambda(y+w) \in A + W \subset A$ et $y + w \in A_\infty$). Par ailleurs $p(A_\infty) = p(A)_\infty$. En effet $p(A_\infty) = p(\bigcap_{\lambda>o} \lambda(A-x_o))$ et comme p(A) est rayonnant en $p(x_o)$ on a $p(A)_\infty = \bigcap_{\lambda>o} p(\lambda(A-x_o))$. Aussi $p(A_\infty) \subset p(A)_\infty$. Mais si $p(x) \in p(A)_\infty$, pour tout $\lambda>0$, $p(x) \in p(\lambda(A-x_o))$ donc $x \in \lambda(A-x_o) + W$, et comme A est saturé par W, cela prouve que $x \in A_\infty$ et que $p(x) \in p(A_\infty)$. De même pour B. On a alors $p(A)_\infty \cap p(B)_\infty = p(A_\infty) \cap p(B_\infty)$ et si $z \in p(A_\infty) \cap p(B_\infty)$, il existe $x \in A_\infty$ et $y \in B_\infty$ tels que $z = p(x) = p(y)$. On a donc $x \in B_\infty + W$ et comme B_∞ est saturé par W, $x \in A_\infty \cap B_\infty$, donc $z \in p(A_\infty \cap B_\infty)$. En conclusion on a $p(A)_\infty \cap p(B)_\infty = p(A_\infty) \cap p(B_\infty) = p(A_\infty \cap B_\infty) = \{0\}$ et les hypothèses du théorème sont vérifiées dans F pour p(A) et p(B). Aussi p(A) - p(B) est fermé, il en est donc de même pour $A-B = p^{-1}(p(A) - p(B))$.

2.3.5 <u>Corollaire</u> : Soit A une partie de E fermée, non vide et ne contenant pas 0. Si C est le cône de sommet 0 dans E engendré par A, on a $\bar{C} = C \cup A_\infty$.

<u>Preuve</u> : Soient C(A) le cône dans $E \times \mathbb{R}$ de sommet 0, engendré par $A \times \{1\}$ (cf. §1) et $B = \{\lambda(0, 1) : \lambda > 0\}$.

C(A) et B sont des cônes fermés, non vides, et B est localement compact. Comme A ne contient pas 0, $C(A) \cap B = \{0\}$ et on peut utiliser le théorème 2.3.1 : C(A) - B est fermé dans $E \times \mathbb{R}$. On en déduit que $(C(A) - B) \cap (E \times \{0\})$ est aussi fermé. Un calcul direct montre que cet ensemble est égal à $(C \cup A_\infty) \times \{0\}$, et comme c'est un fermé, $\bar{C} \subset C \cup A_\infty$.

Il nous reste donc à montrer que $A_\infty \subset \bar{C}$.
En effet, $A_\infty = \bigcap_{\varepsilon>o} \overline{]0,\varepsilon]A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]0,\varepsilon]A \subset C$... d'où le résultat.

<u>*3 - CONES A SEMELLE COMPACTE.*</u>

Dans ce paragraphe, sauf mention du contraire, E sera un espace localement convexe séparé vérifiant la condition

(EC) "l'enveloppe convexe fermée de toute partie compacte de E est compacte".

On trouve dans la littérature idoine une étude de cette condition. En particulier, elle est vérifiée lorsque E est quasi-complet pour la topologie $\sigma(E, E')$; voir à ce sujet ([8] p. 56).

3.1 <u>Définition et rappels.</u>

3.1.1 <u>Définition</u> : Soit C un cône pointé et de sommet 0 dans un espace localement convexe séparé E. On appelle semelle de C l'intersection de C et d'un hyperplan fermé H qui ne passe pas par l'origine et qui coupe toutes les génératrices de C. On montre alors que C est le cône de sommet O engendré par $H \cap C$.

3.1.2 Définition : Un cône C est dit à semelle compacte lorsqu'il possède une semelle qui est compacte.
Dans le cas d'un cône convexe, le théorème suivant caractérise complètement les cônes à semelle compacte. (voir [3]. Chap. II §7).

3.1.3 Théorème : Soient E un espace localement convexe séparé et C un cône dans E qui est convexe, pointé et de sommet O. Il y a équivalence entre :

1) C est à semelle compacte.
2) C est fermé, localement compact et saillant.

On va voir que dans le cas non convexe on a un résultat identique.

Rappelons aussi un résultat qui sera utile par la suite (voir [3], chap. II, §7).

3.1.4 Proposition : Soient E un espace localement convexe séparé et C une partie compacte de E dont l'enveloppe convexe fermée $\overline{co}$ C est compacte. Alors les points extrémaux de $\overline{co}$ C sont dans C.

3.2 Caractérisation des cônes à semelle compacte.

3.2.1 Proposition. Soit C un cône dans E de sommet O, fermé et localement compact. Si $\overline{co}$ C est saillant, alors C est un cône à semelle compacte.

Preuve : Soit U un voisinage convexe et fermé de O pour lequel $U \cap C$ est compact.

Soit M l'intersection de C et de la frontière de U ; c'est aussi un compact.
Si $y \in C$, $y \neq 0$, la demi-droite de sommet l'origine et passant par y coupe M, de sorte que C est le cône de sommet O engendré par M.

Comme O n'est pas dans la frontière de U, on a aussi $O \notin M$.
On ne peut avoir $O \in \overline{co}$ M ; en effet, si c'était le cas, comme O est un point extrémal de $\overline{co}$ C, O serait aussi un point extrémal de $\overline{co}$ M et M étant compact on aurait $O \in M$ (Prop. 3.1.4).
On peut donc séparer strictement O et $\overline{co}$ M par un hyperplan H.
Il est clair que $K = H \cap C$ est une semelle de C ; K est compact puisqu'il est fermé et contenu dans l'image par l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de l'ensemble compact $[0, 1] \times M$.
Cette proposition admet une réciproque :

3.2.2 Proposition : Si C est un cône dans E pointé, de sommet O et à semelle compacte, alors C est fermé, localement compact et $\overline{co}$ C est saillant. De plus, si K est une semelle de C, $\overline{co}$ K est une semelle de $\overline{co}$ C, de sorte que $\overline{co}$ C est aussi un cône à semelle compacte.

Preuve : Soient K une semelle compacte de C et Q le cône pointé de sommet 0 engendré par $\overline{co}$ K ; Q est un cône convexe pointé de sommet 0 et à semelle compacte. Il est donc fermé (th. 3.1.3).

Comme $C \subseteq Q$ on a $\overline{co}\, C \subset Q$; de plus $K \subset C$ implique $\overline{co}\, K \subset \overline{co}\, C$ donc $Q \subset \overline{co}\, C$. Ainsi $\overline{co} C = Q$ est un cône à semelle compacte et $\overline{co}$ K est une semelle de $\overline{co}$ C ce qui prouve la seconde assertion.

Soit $x \in \overline{C}$; il existe un voisinage V de x tel que $V \cap C$ soit contenu dans l'un des ensembles $C_n = \bigcup_{0<\lambda<n} \lambda K$.

Il suffit de prendre pour V un demi-espace ouvert contenant x et déterminé par un translaté d'un hyperplan H tel que $K = H \cap C$. Cela montre que x est un point adhérent à l'un des C_n et comme ces ensembles sont fermés, $x \in C_n$ d'où $x \in C$ et C est fermé.

Comme $\overline{co}$ C est à semelle compacte, il est saillant et localement compact, C étant fermé est donc aussi localement compact.

3.2.3 Contre-exemple : Il peut se faire que C soit fermé, saillant, localement compact sans être à semelle compacte. Dans ce cas $\overline{co}$ C n'est pas saillant. C'est le cas du cône décrit en 1.4.3.

3.3 Cas des cônes du type C(A).

Pour le cas particulier des cônes du type C(A), on peut reformuler la proposition 3.2.1 de la façon suivante :

3.3.1 Lemme : Pour tout ensemble A d'un e.v.t. E, on a :

$$\overline{co}\, C(A) = C(\overline{co}\, A)$$

Preuve : On a évidemment $\overline{co}\, C(A) \subset C(\overline{co}\, A)$. Montrons l'autre inclusion. Coupons $\overline{co}\, C(A)$ par $E \times \{1\}$. On obtient un ensemble B convexe fermé et contenant A. Donc $\overline{co}\, A \subset B$ et $C(\overline{co}\, A) \subset C(B)$.

Comme B est contenu dans $(\overline{co}\, C(A)) \cap (E \times \{1\})$ on a $C(B) \subset \overline{co}\, C(A)$ d'où $C(\overline{co}\, A) \subset \overline{co}\, C(A)$.

3.2.2 Lemme : Pour tout ensemble A d'un evt E, $\overline{co}$ C(A) est saillant si et seulement si $\overline{co}$ A ne contient pas de droite.

Preuve : La condition est nécessaire puisque $(\overline{co}\ A) \times \{1\} \subset \overline{C(\overline{co}\ A)} = \overline{co}\ C(A)$.
Montrons qu'elle est suffisante.
Si D est une droite contenue dans $\overline{co}\ C(A)$ d'après le lemme 3.3.1, D est contenue dans $C(\overline{co}\ A)$. Comme cet ensemble est dans $E \times \mathbb{R}_+$, cette droite ne peut être contenue que dans une des traces de $\overline{C(\overline{co}\ A)}$ sur un $(E \times \{\alpha\})$, $\alpha > 0$.

Par homothétie, on peut se ramener aux cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

Si $\alpha = 0$, D est contenue dans $\overline{C(\overline{co}\ A)} \cap (E \times \{0\})$, c'est-à-dire (Proposition 1.2.2) dans $(\overline{co}\ A)_\infty \times \{0\}$. Mais alors $\overline{co}$ A contient aussi une droite.

Si $\alpha = 1$, D est contenue dans $\overline{C(\overline{co}\ A)} \cap (E \times \{1\})$ c'est-à-dire (Prop. 1.2.2) dans $(\overline{co}\ A) \times \{1\}$.

Dans les deux cas on voit bien que $\overline{co}$ A contient une droite.

3.3.3 Définition : Une partie A d'un e.v.t E est dite asymptotiquement compacte lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de l'origine pour lesquels l'ensemble $([0, \varepsilon] A) \cap V$ est relativement compact.

3.3.4 Lemme : Si A est une partie d'un e.v.t. E rayonnante en a et si a possède dans A un voisinage compact, alors A est asymptotiquement compacte.

Preuve : Comme A est rayonnante en a, il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel $[0, \varepsilon](A-a) \subset A-a$.
Soient U et V des voisinages de l'origine dans E fermés, absorbants, équilibrés et symétriques, tels que $(A-a) \cap V$ soit compact et $U + U \subset V$. On supposera aussi que ε est suffisamment petit pour que $[0, \varepsilon] a \subset U$. On a :

$$([0,\varepsilon]A) \cap U \subset (|0,\varepsilon|(A-a)) \cap (U + U) + [0,\varepsilon]a$$
$$\subset (A-a) \cap V + [0,\varepsilon]a,$$

ce qui prouve que $([0,\varepsilon]A)$ U est relativement compact.

3.3.5 Lemme : Soit A une partie fermée d'un e.v.t. E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{C(A)}$ soit localement compact est que A soit asymptotiquement compacte.

Preuve :
Condition nécessaire. Soient V un voisinage fermé de 0 dans E et $\varepsilon > 0$ pour lesquels $\overline{C(A)} \cap (V \times [-\varepsilon,\varepsilon])$ est compact. L'ensemble $C(A) \cap (V \times]0,\varepsilon])$ est relativement compact, aussi sa projection sur E, qui n'est autre que $(]0,\varepsilon]A) \cap V$, est relativement compacte. Donc A est asymptotiquement compact.

Condition suffisante. Soient V un voisinage de 0 dans E et $\varepsilon > 0$ pour lesquels

$(]0,\varepsilon]\ A)\cap V$ est relativement compact. L'ensemble $C(A)\cap(V\times]0,\varepsilon])$ est contenu dans $((]0,\varepsilon]A)\cap V)\times|0,\varepsilon|$ qui est relativement compact. Aussi <u>$C(A)\cap(V\times]0,\varepsilon])$ est relativement compact</u>.

Soit U un voisinage fermé de 0 dans E qui vérifie $U\subset\mathrm{int}(V)$ et soit $z\in A_\infty\cap U$. Pour tout voisinage W de 0 dans E tel que $z+W\subset V$ on a, puisque $A_\infty=\bigcap_{\alpha>0}\overline{]0,\alpha]A}$,
$z\in]0,\varepsilon]A-W$ donc $(z+W)\cap(]0,\varepsilon]A)\cap V\neq\emptyset$ ce qui prouve que $z\in\overline{(]0,\varepsilon]A)\cap V}$ qui est compact. Aussi $A_\infty\cap U$ est compact et puisque $U\subset V$, $C(A)\cap(U\times]0,\varepsilon])$ est relativement compact. Du fait de la décomposition $\overline{C(A)}=C(A)\cup(A_\infty\times\{0\})$ et de ce qui précède $\overline{C(A)}\cap(U\times[-\varepsilon,\varepsilon])$ est compact et comme $\overline{C(A)}$ est un cône de sommet 0, cela prouve qu'il est localement compact.

3.3.6 <u>Remarques</u> : Si A est fermé et asymptotiquement compact, comme $\overline{C(A)}$ est localement compact, A et A_∞ sont localement compacts.

Mais, sauf lorsque A est rayonnant (Lemme 3.3.4) ou E de dimension finie, la réciproque est fausse. C'est le cas dans $\ell^2(\mathbb{R})$, muni de la topologie forte, pour l'ensemble A formé des suites $(\delta^n_m)_m$, $\delta^n_m=1$ si $n=m$ et 0 sinon, A est fermé, localement compact, $A_\infty=\{0\}$ mais A n'est pas asymptotiquement compact.

3.3.7 <u>Proposition</u> : Soit A une partie de E fermée, asymptotiquement compacte et telle que $\overline{co}$ A ne contienne pas de droite. Alors C(A) est un cône à semelle compacte.

<u>Preuve</u> : Cela résulte de la proposition 3.2.1 et des lemmes 3.3.2 et 3.3.5.

3.3.8 <u>Corollaire</u> : Soit A un ensemble fermé, asymptotiquement compact tel que $\overline{co}$ A soit saillant. Alors $\overline{co}$ A est localement compact.

<u>Preuve</u> : $\overline{C(A)}$ est un cône à semelle compacte (proposition 3.3.7) donc $\overline{co}\ \overline{C(A)}$ est aussi un cône à semelle compacte (proposition 3.2.2). D'après le lemme 3.3.1 $\overline{co}\ \overline{C(A)}=\overline{C(\overline{co}A)}$ aussi $\overline{C(\overline{co}A)}$ est localement compact (car à semelle compacte). On en déduit que $\overline{co}$ A est localement compact.

3.3.9 <u>Remarque</u> : Ce corollaire fournit une condition suffisante pour que la Γ-régularisée d'une fonctionnelle soit inf-compacte.

4 - UN PROBLEME DE MINIMISATION A CONTRAINTES NON CONVEXES.

Suivant une méthode déjà éprouvée pour les fonctions spline, le théorème 2.3.1 va nous permettre de trouver des solutions à des problèmes du type

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{x \in C} |Tx - y|_Y$$

où T est un opérateur linéaire, continu et surjectif de X sur Y (X et Y sont des espaces de Banach) et C est une partie rayonnante de X.

Dans ([7]. Part. I. §2) les auteurs donnent des conditions d'existence de solutions pour ce problème qui portent essentiellement sur l'opérateur T : (Propriété D) les images par T des parties faiblement fermées et bornées de X sont des parties faiblement fermées de Y ; cette condition permet de faire converger une suite minimisante bornée, modulo des hypothèses de compacité faible de la boule unité de Y.

Notre démarche est différente puisque les hypothèses portent à la fois sur l'opérateur T et l'ensemble des contraintes C.

4.1.1 <u>Théorème</u> : Supposons que

1) Y est le dual d'un espace de Banach Y .

2) TC est faiblement fermé dans $(Y, \sigma(Y, Y))$.

Alors le problème $(\mathcal{P})$ a des solutions.

<u>Preuve</u> : Soit (x_n) une suite minimisante de $(\mathcal{P})$; $x_n \in C$ et $\lim_{n\to\infty} |Tx_n - y| = \alpha$.

Pour n assez grand $|Tx_n - y| < \alpha+1$ aussi la compacité des boules fermées pour $\sigma(Y,Y)$ permet de trouver une valeur d'adhérence z de (Tx_n).

Comme TC est faiblement fermé dans Y, il existe $x \in C$ pour lequel $z = Tx$. On déduit de la semi-continuité de la norme pour $\sigma(Y, Y)$ que x est solution de $(\mathcal{P})$.

4.1.2 <u>Remarque</u> : L'hypothèse 1 du théorème est satisfaite lorsque Y est un espace réflexif.

4.1.3 <u>Théorème</u> : On suppose que

1) Y est un espace de Banach réflexif,
2) T est linéaire, continu, surjectif,
3) C + ker T est faiblement fermé dans X.

Alors le problème $(\mathcal{P})$ possède des solutions.

<u>Preuve</u> : Comme T est surjectif, c'est un homomorphisme de X sur Y (th. de Banach) donc un homomorphisme faible ([3]. Chap. IV. §4. Prop. 9). Aussi T(C) est faiblement fermé dans Y car $T^{-1}(Y \setminus T(C)) = X \setminus (C + \ker T)$ est faiblement ouvert X.

4.1.4 Théorème : Le problème $(\mathcal{P})$ a des solutions lorsque :

1) Y est un espace de Banach réflexif et lorsque

h1) T est surjectif et son noyau N est de dimension finie,

h2) C est rayonnant et σ-fermé dans X,

h3) $C_\infty \cap N = \{0\}$,

ou bien lorsque

g1) T est surjectif,

g2) C est rayonnant, σ-fermé et σ-localement compact,

g3) $C_\infty \cap N = \{0\}$.

Preuve : Les hypothèses g1, g2, g3 ou h1, h2, h3 permettent d'appliquer le théorème 2.3.1 et donc de prouver la fermeture de C+N. On conclut avec le théorème 4.1.3.

[1] - M. ATTEIA. Fonctions spline définies sur un ensemble convexe. Num. Math. 12 (1968) p. 192-210.

[2] - J. BAIR. Cones asymptotes et cônes caractéristiques. Bulletin de la société royale des sciences de Liège n° 9-10, 1971, p. 428.

[3] - N. BOURBAKI. Espaces vectoriels topologiques. Hermann, Paris (1966).

[4] - G. CHOQUET. Ensembles et cônes faiblement complets. CRAS - 254 (1962) p. 1908-1910.

[5] - J. DIEUDONNE. Sur la séparation des ensembles convexes. Math. Annalen 163, 1966, p. 1-3.

[6] - J.P. DEDIEU. Etude d'un point de vue projectif des fonctionnelles convexes. Thèse 3ème cycle - Toulouse.

[7] - S.D. FISHER et J.W. JEROME. Minimum norm extremal in fonction spaces -Lectures Notes in Math. N° 479.

[8] - J.L. JOLY. Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes. Thèse - Grenoble.

[9] - P.J. LAURENT. Approximation et Optimisation. Hermann, Paris (1972).

DEDIEU Jean-Pierre - U.E.R. Mathématiques
UNIVERSITE PAUL SABATIER
118, route de Narbonne
31077 TOULOUSE CEDEX (France)