

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LIONEL THIBAUT

## **Calcul sous-différentiel et calcul des variations en dimension infinie**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 60 (1979), p. 161-175

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1979\\_\\_60\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__161_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL SOUS-DIFFÉRENTIEL ET CALCUL DES VARIATIONS EN DIMENSION INFINIE

Lionel THIBAUT

0 - INTRODUCTION

Ce travail traite du problème de Bolza. Ce problème a déjà suscité de nombreuses études notamment celles de T. ROCKAFELLAR et de F. CLARKE. Le premier a obtenu en dimension finie toute une série de résultats en remplaçant les conditions classiques de différentiabilité par des conditions de convexité. Le second donne en dimension finie, en utilisant un problème convexe tangent, des conditions nécessaires pour qu'un point résolve le problème dans les cas où le problème est en quelque sorte lipschitzien (CLARKE [3]) ou en quelque sorte calme (CLARKE [5]). Le but recherché ici est de montrer que sous des hypothèses de Lipschitz on peut obtenir en dimension infinie des conditions nécessaires pour le problème de Bolza similaires aux précédentes.

Après avoir fait quelques rappels, on caractérise dans le paragraphe 2 le sous-différentiel d'un certain type de fonctionnelle intégrale intervenant par la suite. Ensuite, dans le paragraphe 3, on pose le problème de Bolza et on donne des conditions nécessaires pour qu'une certaine fonction réalise un minimum local pour ce problème.

1 - DEFINITIONS - NOTATIONS ET RAPPELS

Nous supposons ici que  $E$  est un espace de Banach réel séparable. Soient  $T$  un espace localement compact dénombrable à l'infini,  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $T$  et  $p \in [1, +\infty[$ .

Nous dirons qu'une application  $h$  de  $T$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  est  $\mu$ -quasi-intégrable si elle est  $\mu$ -mesurable et minorée  $\mu$ -presque partout par une fonction  $\mu$ -intégrable. Remarquons que  $-h^- \leq h$  (où  $h^-$  désigne la partie négative de  $h$ ), nous pouvons dire qu'une fonction  $\mu$ -mesurable  $h$  est  $\mu$ -quasi-intégrable si et seulement si sa partie négative  $h^-$  est  $\mu$ -intégrable. Pour une fonction  $h$  quasi-intégrable nous pouvons définir la quasi-intégrale de  $h$  (ou intégrale de  $h$ ) que nous noterons  $\int h \, d\mu$  ou  $\int h \cdot \mu$  en posant :

$$\int h \, d\mu = \int^* h^+ \, d\mu - \int h^- \, d\mu$$

où  $\int^* h^+ \, d\mu$  désigne l'intégrale supérieure de  $h^+$  par rapport à  $\mu$ .

On vérifie facilement que la somme de deux fonctions  $h$  et  $g$   $\mu$ -quasi-intégrables est  $\mu$ -quasi-intégrable, que  $\int (h+g)d\mu = \int h d\mu + \int g d\mu$  et que si  $h \leq g$  alors  $\int h d\mu \leq \int g d\mu$ .

Soit  $f$  une application de  $T \times E$  dans  $]-\infty, +\infty]$  telle que :

- 1/ Pour toute application  $z$  de  $T$  dans  $E$   $\mu$ -mesurable, la fonction  $t \rightarrow f(t, z(t))$  est  $\mu$ -mesurable.
- 2/ Pour toute application  $z \in L_E^p(T, \mu)$  la fonction  $t \rightarrow f(t, z(t))$  est  $\mu$ -quasi-intégrable.

Remarquons que  $L_E^p(T, \mu)$ , espace vectoriel des applications  $h$  de  $T$  dans  $E$   $\mu$ -mesurables telles que  $|h|^p$  soit  $\mu$ -intégrable, est un espace de Banach pour sa norme usuelle et que son dual fort est isométriquement isomorphe à  $L_{E_s}^q(T, \mu)$ , où  $q$  est le conjugué de  $p$  défini par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $L_{E_s}^q(T, \mu)$  désignant l'espace des applications  $g$  de  $T$  dans  $E'$  scalairement  $\mu$ -mesurables et telles que  $\int^* |g|^q d\mu < +\infty$  si  $1 < q < +\infty$  ou bornées en mesure si  $q = +\infty$ , muni de la norme  $\|g\|_q = N_q(|g|)$  ou  $\|g\|_\infty = N_\infty(|g|)$  (cf. DINULEANU [1], théorème 18.42).

Nous considérerons pour  $p \in [1, \infty[$ , l'application  $I_f$  de l'espace de Banach  $L_E^p(T, \mu)$  dans  $]-\infty, +\infty]$  définie par :

$$I_f : L_E^p \rightarrow ]-\infty, \infty]$$

$$x \rightarrow I_f(x) = \int_T f(t, x(t)) \mu(dt).$$

Avant d'étudier le sous-différentiel de l'application  $I_f$ , faisons quelques rappels.

Soit  $X$  un espace de Banach réel,  $\Omega$  un ouvert non vide de  $X$ ,  $g$  une application de  $X$  dans  $]-\infty, +\infty]$ , lipschitzienne sur  $\Omega$  (donc finie sur  $\Omega$ ). Pour tout  $x_0 \in \Omega$  et tout  $v \in E$  nous pouvons définir, suivant CLARKE, la dérivée directionnelle généralisée de  $g$  au point  $x_0$  dans la direction  $v$  par :

$$g^*(x_0; v) = \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \delta \rightarrow 0^+}} \delta^{-1} [g(x+\delta v) - g(x)]$$

avec la convention  $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$  pour ne pas alourdir l'écriture. Comme la fonction  $g$  est lipschitzienne sur  $\Omega$  voisinage de  $x_0$ ,  $g^*(x_0; v)$  est finie pour tout  $v \in E$ .

Le sous-différentiel de  $g$  en  $x_0$ , noté  $\partial g(x_0)$  est l'ensemble (CLARKE [4]) défini par :

$$\partial g(x_0) = \{\zeta \in E' \mid \langle \zeta, v \rangle \leq g^*(x_0; v)\}$$

où  $E'$  désigne l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Propriétés (CLARKE [4], THIBAUT [1]) :

- 1/  $\partial g(x_0) \neq \emptyset$  et  $\partial g(x_0)$  est un convexe faiblement compact dans  $E'$ .
- 2/ si  $g$  admet un minimum local en  $x_0$ , alors  $0 \in \partial g(x_0)$ .
- 3/ si  $g_1$  et  $g_2$  désignent deux fonctions de  $X$  dans  $]-\infty, +\infty]$ , lipschitziennes sur  $\Omega$ , alors  $\partial(g_1+g_2)(x_0) \subset \partial g_1(x_0) + \partial g_2(x_0)$ .
- 4/ si  $A$  est une application linéaire continue d'un espace de Banach  $Y$  dans  $X$  et si pour  $y_0 \in Y$  on a  $Ay_0 \in \Omega$ , alors  $\partial(g \circ A)(y_0) \subset A^*(\partial g)(x_0)$  où  $A^*$  est la transposée de  $A$ , et  $x_0 = Ay_0$ .

Considérons maintenant une partie fermée non vide  $F$  de  $X$  et  $x_0$  un point de  $F$ . Désignons par  $d_F$  la fonction lipschitzienne de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$d_F(x) = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Le cône normal de  $F$  au point  $x_0$ , noté  $N_F(x_0)$ , sera (cf. CLARKE [4]), le cône engendré par l'ensemble convexe  $\partial d_F(x_0)$ .

## 2 - SOUS-DIFFERENTIEL DE $I_f$

Commençons par étudier la dérivée directionnelle généralisée de  $I_f$  en un point où  $I_f$  est localement lipschitzienne.

2.1. Proposition : Supposons que  $x_0 \in L_E^p(T, \mu)$  vérifie les conditions suivantes :

- 1/ il existe une boule ouverte  $B_p(x_0, \beta)$  de centre  $x_0$  et de rayon  $\beta > 0$  dans  $L_E^p$  et une fonction  $k_{x_0} \in L^1_{\mathbb{R}}(T, \mu)$  telles que pour tous  $x, y \in B_p(x_0, \beta)$  :  
(1)  $|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq k_{x_0}(t) \|x(t) - y(t)\|$   $\mu$ -p.p.
- 2/ la fonction  $f(t, x_0(t))$  est  $\mu$ -intégrable.
- 3/ pour  $\mu$ -presque tout  $t \in T$ , la fonction  $f(t, \cdot) = f_t$  est lipschitzienne sur un voisinage de  $x_0(t)$  dans  $E$ .

Alors :

- a) pour tout  $x \in B_p(x_0, \beta)$  la fonction  $t \mapsto f(t, x(t))$  est  $\mu$ -intégrable ; la fonction  $I_f$  précédemment définie est lipschitzienne sur  $B_p(x_0, \beta)$  .
- b) pour tout  $v \in L_E^p(T, \mu)$  on a :

$$I_f'(x_0; v) \leq \int_T f_t'(x_0(t); v(t)) \mu(dt)$$

Démonstration :

- a) est évident. Montrons b). Soit alors  $v \in L_E^p$  .

1°/ Soit  $S$  une suite dense dans  $E \times ]0, +\infty[$  . Pour tout  $n \geq 1$  posons  $S_n = S \cap (B(0, 1/n) \times ]0, 1/n[)$  . Nous avons alors :

$$f_t'(x_0(t); v(t)) = \inf_n \sup_{(h, \delta) \in S_n} \delta^{-1} [f_t(x_0(t) + h + \delta v(t)) - f_t(x_0(t) + h)]$$

pour  $\mu$ -presque tout  $t \in T$  . Ainsi  $t \mapsto f_t'(x_0(t); v(t))$  est  $\mu$ -mesurable et donc d'après (1)  $\mu$ -quasi-intégrable, car la fonction

$$t \mapsto \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{-1} [f(x_0(t) + \delta v(t)) - f(x_0(t))]$$

est  $\mu$ -intégrable et pour  $\mu$  presque tout  $t$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{-1} [f(x_0(t) + \delta v(t)) - f(x_0(t))] \leq f_t'(x_0(t); v(t)) .$$

2°/ Comme  $I_f(x_0; v) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \int_T \delta^{-1} [f_t(x_0(t) + h(t) + \delta v(t)) - f_t(x_0(t) + h(t))] \mu(dt)$ ,

il existe une suite  $(h_n)_n$  tendant vers 0 dans  $L_E^p(T, \mu)$  et une suite  $(\delta_n)_n$  tendant vers 0,  $\delta_n > 0$ , telles que

$$I_f(x_0; v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \delta_n^{-1} [f_t(x_0(t) + h_n(t) + \delta_n v(t)) - f_t(x_0(t) + h_n(t))] \mu(dt) .$$

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que  $h_n(t) \rightarrow 0$  dans  $E$  pour  $\mu$ -presque tout  $t$  . Ainsi nous obtenons en appliquant le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} I_f(x_0; v) &\leq \int_T \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n^{-1} [f_t(x_0(t) + h_n(t) + \delta_n v(t)) - f_t(x_0(t) + h_n(t))] \mu(dt) \\ &\leq \int_T f_t'(x_0(t); v(t)) \mu(dt) \quad \square . \end{aligned}$$

Dans la démonstration de la proposition 2.3. nous utiliserons le lemme suivant.

2.2. Lemme : Soit  $g$  une fonction de  $T$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -quasi-intégrable. On suppose que pour toute partie  $A$  de  $T$   $\mu$ -intégrable  $\int_A g(x) \mu(dx) \geq 0$ . Alors on a  $g \geq 0$   $\mu$ -p.p.

Démonstration :

Soit  $g^-$  la partie négative de  $g$ ,  $[g(x)]^- = \sup(-g(x), 0)$  pour tout  $x \in T$ . Supposons que  $A = \{x \in T | g(x) < 0\}$  n'est pas de  $\mu$ -mesure nulle. Pour tout entier  $n \geq 1$  posons :

$$A_n = \{x \in T | g^-(x) > 1/n\}.$$

Alors on a  $A = \{x \in T | g^-(x) > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ . Comme  $g^-$  est intégrable et que  $\mu(A) > 0$ , il existe un entier  $n_0 \geq 1$  tel que  $0 < \mu(A_{n_0}) < +\infty$ .

Ainsi pour ce  $n_0$  on a :

$$\frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) \leq \int_{A_{n_0}} g^-(x) \mu(dx)$$

ou

$$\int_{A_{n_0}} g(x) \mu(dx) = \int_{A_{n_0}} -g^-(x) \mu(dx) \leq -\frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) < 0.$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une condition nécessaire pour qu'un point appartienne à  $\partial I_f(x_0)$ .

### 2.3. Proposition

Si les hypothèses de la proposition 2.1. sont vérifiées et si  $\zeta \in \partial I_f(x_0)$  alors  $\zeta(t) \in \partial f_t(x_0(t))$   $\mu$ -p.p.

Démonstration

Soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  une suite dense dans  $E$ ,  $N_0$  un ensemble négligeable tel que pour tout  $t \notin N_0$   $f_t$  est lipschitzienne au voisinage de  $x_0(t)$ . Soit  $n \geq 1$ .

Pour tout ensemble  $A$   $\mu$ -intégrable, nous avons  $v_n \chi_A \in L_E^p(T, \mu)$ . Ainsi pour  $\zeta \in \partial I_f(x_0)$ , nous avons d'après la proposition précédente et les définitions :

$$\begin{aligned} \int_A \langle \zeta(t), v_n \rangle \mu(dt) &= \langle \zeta, v_n \chi_A \rangle \\ &\leq I_f(x_0; v_n \chi_A) \leq \int_T f'_t(x_0(t); v_n \chi_A(t)) \mu(dt) \\ &= \int_A f'_t(x_0(t); v_n) \mu(dt). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ensemble  $A$   $\mu$ -intégrable, il existe d'après le lemme précédent une partie  $N_n$  de  $T$   $\mu$ -négligeable telle que pour tout  $t \notin N_n$

$$\langle \zeta(t), v_n \rangle \leq f'_t(x_0(t); v_n).$$

Si nous posons  $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$ , nous avons alors pour tout  $t \notin N$  :

$$\langle \zeta(t), v \rangle \leq f'_t(x_0(t); v) \text{ pour tout } v \in E.$$

Donc nous concluons que :  $\zeta(t) \in \partial f'_t(x_0(t))$  pour tout  $t \notin N$ , ensemble de  $\mu$ -mesure nulle.  $\square$

Nous allons donner un cas où la condition nécessaire de la proposition précédente est aussi une condition suffisante.

#### 2.4. Proposition

Supposons que les conditions précédentes soient vérifiées et que pour  $\mu$ -presque tout  $t \in T$ ,  $f'_t(x_0(t); \cdot)$  existe et  $f'_t(x_0(t); \cdot) = f'_t(x_0(t); \cdot)$ .

Alors 1/  $I'_f(x_0; v) = I'_f(x_0; v) = \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt)$  pour tout  $v \in L^p_E(T, \mu)$ .

2/  $\zeta \in \partial I_f(x_0)$  si et seulement si  $\zeta(t) \in \partial I_f(x_0(t))$   $\mu$ -p.p.

#### Démonstration :

1/ Soit  $v \in L^p_E(T, \mu)$ . Montrons que  $I'_f(x_0; v)$  existe. Pour tout  $\delta > 0$  assez petit nous avons :

$$\left| \delta^{-1} [f_t(x_0(t) + \delta v(t)) - f_t(x_0(t))] \right| \leq k_{x_0}(t) \|v(t)\| \mu\text{-p.p.}$$

et

$$t \mapsto \delta^{-1} [f_t(x_0(t) + \delta v(t)) - f_t(x_0(t))] \mu\text{-mesurable.}$$

Nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_T \delta^{-1} [f_t(x_0(t) + \delta v(t)) - f_t(x_0(t))] \mu(dt) \\ = \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt) \end{aligned}$$

ou

$$I'_f(x_0; v) = \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt).$$

Mais, comme d'après la proposition 2.1.,  $I'_f(x_0; v) \leq \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt)$ ,

nous avons,  $I'_f(x_0; v) \leq I'_f(x_0; v) \leq \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt)$

$$= \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt) = I'_f(x_0; v).$$

Donc nous avons :

$$I'_{f'}(x_0; \dot{v}) = I'_{f'}(x_0; v) = \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt).$$

2/ D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que si  $\zeta \in L^q_{E'}(T, \mu)$  est tel que  $\zeta(t) \in \partial f_t(x_0(t))$   $\mu$ -p.p. alors  $\zeta \in \partial I_{f'}(x_0)$ .

Pour  $\mu$ -presque tout  $t \in T$  nous avons  $\langle \zeta(t), v(t) \rangle \leq f'_t(x_0(t); v(t))$  et par suite  $\langle \zeta, v \rangle \leq \int_T f'_t(x_0(t); v(t)) \mu(dt) = I'_{f'}(x_0; v)$ . Donc nous avons bien  $\zeta \in \partial I_{f'}(x_0)$ .  $\square$

### 3 - PROBLEME DE BOLZA

E désignera encore un espace de Banach séparable. Nous noterons  $A^p_E([0, T])$  l'ensemble des applications  $x$  de  $[0, T]$  dans E primitive sur  $[0, T]$  d'une fonction  $\dot{x} \in L^p_E([0, T])$ . Alors, pour  $x \in A^p_E([0, T])$ , nous avons pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(\theta) d\theta.$$

De même,  $A^q_{E_s}([0, T])$  sera l'ensemble des applications  $x$  de  $[0, T]$  dans  $E'$  primitive faible d'une application  $\dot{x} \in L^q_{E_s}([0, T])$ . Alors pour tout  $x \in A^q_{E_s}$ , nous avons pour tout  $t \in [0, T]$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(\theta) d\theta, \text{ intégrale faible.}$$

Par la suite nous écrirons  $L^p_E$ ,  $A^p_E$  au lieu de  $L^p_E([0, T], dt)$  et  $A^p_E([0, T])$ , dt étant la mesure de Lebesgue sur  $[0, T]$ .

L'espace vectoriel  $A^p_E$  sera muni de la norme  $\|x\|_{p,A} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_p$  où  $\|\dot{x}\|_p = \left[ \int_0^T |\dot{x}(t)|^p dt \right]^{1/p}$ . Ainsi le dual de  $A^p_E$  est isomorphe à  $A^q_{E_s}$  avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soit L une application de  $[0, T] \times E \times E$  dans  $]-\infty, +\infty]$  et soit  $x_0$  un point de  $A^p_E$  tels que :

i) Pour tous  $u, v$ , applications Lebesgue-mesurables de T dans E, la fonction

$$t \mapsto L(t, u(t), v(t)) \text{ est Lebesgue-mesurable et pour tous } x, y \in L^p_E(T, \mu)$$

$$t \mapsto L(t, x(t), y(t)) \text{ est Lebesgue-quasi-intégrable.}$$

ii) il existe un voisinage ouvert de  $(x_0, \dot{x}_0)$  dans  $L^p_E \times L^p_E \approx L^p_E \times E$  (isomorphisme) et une fonction  $k_{x_0} \in L^q_{R}([0, T])$  tels que pour tous  $(x, y)$  et  $(u, v)$  dans ce voisinage :



$$|L(t, x(t), y(t)) - L(t, u(t), v(t))| \leq k_{x_0}(t) [\|x(t) - u(t)\| + \|y(t) - v(t)\|] \text{ p.p.}$$

iii) la fonction  $t \mapsto L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$  est Lebesgue-intégrable.

iv) pour presque tout  $t$ , la fonction  $L(t, \dots)$  est lipschitzienne sur un voisinage de  $(x_0(t), \dot{x}_0(t))$  dans  $E \times E$ .

Nous désignerons par  $\mathcal{L}$  soit une fonction localement lipschitzienne de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  soit la fonction indicatrice d'un fermé de  $E \times E$ .

Nous exprimerons une conditions nécessaire pour que ce point  $x_0 \in A_E^P$  donne un minimum local pour le problème de Bolza suivant :

$$P[\mathcal{L}, L] : \text{minimiser } \{ \mathcal{L}(x(0), x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \mid x \in A_E^P \},$$

c'est-à-dire pour que  $x_0$  résolve le problème  $P[\mathcal{L}, L]$  sur une boule

$$B_{p,A}(x_0, \varepsilon) = \{ x \in A_E^P([0, T]) \mid \|x - x_0\|_{p,A} < \varepsilon \}.$$

Considérons les applications linéaires  $\alpha$  de  $E \times L_E^P \approx A_E^P$  dans  $E \times E$  et  $\beta$  de  $E \times L_E^P \approx A_E^P$  dans  $L_E^P \times L_E^P$  définies par :

$$\alpha : (x(0), \dot{x}) \mapsto (x(0), x(T))$$

$$\beta : (x(0), \dot{x}) \mapsto (x, \dot{x}).$$

Le problème  $P[\mathcal{L}, L]$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\text{Minimiser } \{ \mathcal{L}\alpha(x) + I_L\beta(x) \mid x \in A_E^P \}$$

où  $I_L$  est l'application de  $L_E^P \times L_E^P \approx L_E^P \times E$  dans  $[-\infty, +\infty]$  définie par

$$I_L(x, y) = \int_0^T L(t, x(t), y(t)) dt.$$

Commençons par calculer les applications transposées de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

3.1. Lemme : L'application  $\alpha$  est linéaire et continue et sa transposée de  $E' \times E'$  dans  $E' \times L_E^q$ , est donnée par :

$$\alpha^* : (\zeta, \xi) \mapsto (\zeta + \xi, \xi)$$

où  $\xi$  est la fonction constante  $t \mapsto \xi$ .

Démonstration :

$\alpha$  est évidemment une application linéaire continue. Soient  $\zeta$  et  $\xi \in E'$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, \xi \rangle ; \alpha(x(0), \dot{x}) &= \langle \zeta, \xi \rangle ; (x(0), x(0) + \int_0^T \dot{x}(t) dt) > \\
&= \langle \zeta, x(0) \rangle + \langle \xi, x(0) + \int_0^T \dot{x}(t) dt \rangle \\
&= \langle \zeta + \xi, x(0) \rangle + \int_0^T \langle \xi, \dot{x}(t) \rangle dt \\
&= \langle \zeta + \xi, x(0) \rangle + \langle \overset{\vee}{\xi}, \dot{x} \rangle \\
&= \langle (\zeta + \xi, \overset{\vee}{\xi}) ; (x(0), \dot{x}) \rangle
\end{aligned}$$

où  $\overset{\vee}{\xi}$  désigne l'application constante  $t \mapsto \xi$  de  $[0, T]$  dans  $E'$ . Ainsi

$$\alpha^*(\zeta, \xi) = (\zeta + \xi, \overset{\vee}{\xi}) . \quad \square$$

Le lemme suivant donne une formule d'intégration par parties qui sera utilisée pour le calcul de l'application transposée de  $\beta$ .

### 3.2. Lemme :

Soient  $x \in A_E^P$  et  $u \in A_{E'}^Q$ . Pour tout  $t \in [0, T]$  nous avons

$$\begin{aligned}
\langle u(t), x(t) \rangle - \langle u(0), x(0) \rangle \\
= \int_0^t [ \langle \dot{u}(s), x(s) \rangle + \langle u(s), \dot{x}(s) \rangle ] ds .
\end{aligned}$$

### Démonstration :

1/ Montrons que l'application  $\varphi$  de  $[0, T] \times [0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$(t, s) \mapsto \langle \dot{u}(t), \dot{x}(s) \rangle \text{ est Lebesgue-mesurable.}$$

Désignons par  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $[0, T]$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Posons  $\eta = \text{Min}(\epsilon, \epsilon/2T)$ . Comme  $\dot{u}$  est scalairement  $\lambda$ -mesurable et que  $E$  est un espace de Banach séparable,  $\dot{u}$  est une application  $\lambda$ -mesurable de  $[0, T]$  dans  $E'$  muni de sa topologie faible. Ainsi il existe un compact  $K \subset [0, T]$  tel que  $\lambda([0, T] \setminus K) \leq \eta$  et que la restriction de  $\dot{u}$  (resp.  $\dot{x}$ ) à  $K$  soit une application continue de  $K$  dans  $E'$  muni de sa topologie faible (resp. dans  $E$  muni de sa topologie forte). Par suite  $\dot{u}(K)$  est faiblement compact donc équicontinue dans  $E'$ . Nous en déduisons que la restriction à  $\dot{u}(K) \times E$  de la forme bilinéaire canonique sur  $E' \times E$  est continue pour  $\dot{u}(K)$  muni de la topologie induite par la topologie faible de  $E'$  et  $E$  de sa topologie d'espace normé (cf. BOURBAKI [1]). Alors la restriction à  $K \times K$  de l'application  $(t, s) \mapsto \langle \dot{u}(t), \dot{x}(s) \rangle$  est continue. Mais, si nous posons  $\mu = \lambda \otimes \lambda$  nous avons :

$$\mu([0, T] \times [0, T] \setminus K \times K) \leq \mu(( [0, T] \setminus K) \times [0, T]) + \mu([0, T] \times ([0, T] \setminus K)) .$$

$$\leq \varepsilon .$$

Ainsi l'application  $(t, s) \mapsto \langle \dot{u}(t), \dot{x}(s) \rangle$  est Lebesgue-mesurable sur  $[0, T] \times [0, T]$ .

2/ Comme  $\varphi$  est Lebesgue-mesurable et que :

$$| \langle \dot{u}(t), \dot{x}(s) \rangle | \leq |\dot{u}(t)| \cdot |\dot{x}(s)|$$

nous pouvons affirmer que  $\varphi$  est Lebesgue-intégrable sur  $[0, T] \times [0, T]$ . De même applications  $s \mapsto \langle \dot{u}(s), x(s) \rangle$  et  $s \mapsto \langle u(s), \dot{x}(s) \rangle$  sont Lebesgue-intégrables sur  $[0, T]$ . Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle u(s), \dot{x}(s) \rangle ds &= \int_0^t \langle u(0) + \int_0^s \dot{u}(\theta) d\theta, \dot{x}(s) \rangle ds \\ (1) \quad &= \int_0^t \left[ \int_0^s \langle \dot{u}(\theta), \dot{x}(s) \rangle d\theta \right] ds + \langle u(0), x(t) - x(0) \rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même :} \quad \int_0^t \langle \dot{u}(s), x(s) \rangle ds &= \int_0^t \langle \dot{u}(s), x(0) + \int_0^s \dot{x}(\theta) d\theta \rangle ds \\ &= \int_0^t \left[ \int_0^s \langle \dot{u}(s), \dot{x}(\theta) \rangle d\theta \right] ds + \langle u(t) - u(0), x(0) \rangle \\ (2) \quad &= \int_0^t \left[ \int_0^t \langle \dot{u}(s), \dot{x}(\theta) \rangle ds \right] d\theta + \langle u(t) - u(0), x(0) \rangle \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de Fubini.

Toujours d'après Fubini, en regroupant (1) et (2) nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left[ \langle u(s), \dot{x}(s) \rangle + \langle \dot{u}(s), x(s) \rangle \right] ds \\ &= \int_0^t \int_0^t \langle \dot{u}(\theta), \dot{x}(s) \rangle d\theta ds + \langle u(0), x(t) - x(0) \rangle \\ &\quad + \langle u(t) - u(0), x(0) \rangle . \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^t \langle \dot{u}(\theta), \dot{x}(s) \rangle d\theta ds \\ &= \int_0^t \langle \dot{u}(\theta), x(t) - x(0) \rangle d\theta = \langle u(t) - u(0), x(t) - x(0) \rangle . \end{aligned}$$

Donc nous avons finalement :

$$\int_0^t \left[ \langle u(s), \dot{x}(s) \rangle + \langle \dot{u}(s), x(s) \rangle \right] ds = \langle u(t), x(t) \rangle - \langle u(0), x(0) \rangle .$$

Ceci termine la preuve du lemme.  $\square$

## 3.3. Lemme

L'application  $\beta$  est linéaire et continue et sa transposée de  $L_{E'}^q \times L_{E'}^q$ , dans  $E' \times L_{E'}^q$ , est donnée par :

$$\beta^* : (u, v) \mapsto \left( \int_0^T u(\theta) d\theta, v - U \right)$$

où, pour tout  $t \in [0, T]$

$$U(t) = - \int_t^T u(\theta) d\theta .$$

Démonstration :

$\beta$  est évidemment une application linéaire continue. Soient  $u$  et  $v$  dans  $L_{E'}^q$ . Si nous posons :

$$U(t) = - \int_t^T u(\theta) d\theta ,$$

nous avons :

$$\begin{aligned} & \langle (u, v) ; \beta(x(0), \dot{x}) \rangle = \langle (u, v) ; (x, \dot{x}) \rangle \\ &= \int_0^T \langle \dot{U}(t), x(t) \rangle dt + \int_0^T \langle v(t), \dot{x}(t) \rangle dt \\ &= \langle U(T), x(T) \rangle - \langle U(0), x(0) \rangle - \int_0^T \langle U(t), \dot{x}(t) \rangle dt + \int_0^T \langle v(t), \dot{x}(t) \rangle dt \\ & \quad \text{(d'après le lemme précédent).} \\ &= \langle \int_0^T u(\theta) d\theta, x(0) \rangle + \int_0^T \langle v(t) - U(t), \dot{x}(t) \rangle dt \\ &= \langle \int_0^T u(\theta) d\theta, x(0) \rangle + \langle v - U, \dot{x} \rangle \\ &= \langle \left( \int_0^T u(\theta) d\theta, v - U \right) ; (x(0), \dot{x}) \rangle \end{aligned}$$

Donc nous concluons que :

$$\beta^*(u, v) = \left( \int_0^T u(\theta) d\theta, v - U \right) . \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une condition nécessaire pour le problème  $P[\ell, L]$  dans le cas où  $\ell$  est localement lipschitzienne.

## 3.4. Proposition

Si  $L$  vérifie les hypothèses i), ii), iii) et iv) , si  $\ell$  est une fonction localement lipschitzienne sur  $E \times E$  et si  $x_0$  donne un minimum local pour le problème

$P[\ell, L]$ , alors il existe  $\zeta \in A_{E, s}^q$  telle que :

$$(\xi(t), \zeta(t)) \in \partial L_t(x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad \text{p.p.}$$

et

$$(\zeta(0), -\zeta(T)) \in \partial \ell(x_0(0), x_0(T)).$$

Démonstration :

D'après ii) et iii),  $I_L$  est lipschitzienne sur un voisinage de  $(x_0, \dot{x}_0)$  dans  $L_E^p \times L_E^p \approx L_E^p \times E$ . Donc, la fonction  $\ell\alpha + I_L\beta$  est lipschitzienne sur un voisinage de  $x_0$  dans  $A_E^p$ . Alors, d'après les rappels 1) nous avons :

$$0 \in \partial[\ell\alpha + I_L\beta](x_0) \subset \alpha^*(\partial \ell(\alpha x_0)) + \beta^*(\partial I_L(\beta x_0)).$$

Donc, il existe, d'après les deux lemmes précédents,

$$(u, v) \in \partial I_L(x_0, \dot{x}_0) \quad \text{et} \quad (a, b) \in \partial \ell(x_0(0), x_0(T))$$

tels que :

$$(a+b, \tilde{b}) = - \left( \int_0^T u(\theta) d\theta, v - U \right)$$

ou :

$$\begin{cases} a + b = - \int_0^T u(\theta) d\theta & (1) \\ b = -v(t) - \int_t^T u(\theta) d\theta \end{cases}$$

Donc nous avons :

$$v(t) = -b - \int_t^T u(\theta) d\theta.$$

Par suite  $v \in A_E^p$ , et :

$$\dot{v}(t) = u(t) \quad \text{p.p.}$$

De plus, pour  $t = T$  dans (2), nous avons :

$$b = -v(T).$$

Ainsi nous déduisons de (1) que :

$$a = v(0).$$

Posons maintenant  $\zeta = v$ . Alors  $(\xi, \zeta) \in \partial I_L(x_0, \dot{x}_0)$  et

$$(\zeta(0), -\zeta(T)) \in \partial \ell(x_0(0), x_0(T)).$$

Il nous suffit donc d'appliquer la proposition 2.3. pour conclure que :

$$(\zeta(t), \zeta(t)) \in \partial L_+(x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad \text{p.p.} \quad \square$$

En adaptant la démarche de CLARKE ([3], lemme 3.2.) nous pouvons démontrer le lemme suivant qui nous permettra de traiter le cas où  $\ell$  est une fonction indicatrice.

### 3.5. Lemme

Supposons que  $\ell$  est la fonction indicatrice d'un ensemble fermé  $F$  dans  $E \times E$  et que  $x_0$  résoud localement le problème  $P[\ell, L]$ , alors il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $x_0$  donne un minimum local pour le problème  $P[n d_F, L]$  où  $d_F$  désigne la fonction distance à l'ensemble  $F$ .

Démonstration :

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $x_0$  donne un minimum pour le problème  $P[\ell, L]$  sur la boule  $B_{p,A}(x_0, \varepsilon)$  de  $A_E^p$  et tel que la fonction  $L$  vérifie la condition ii) sur  $B_p(x_0, \varepsilon) \times B_p(\dot{x}_0, \varepsilon)$ . Montrons que  $x_0$  résoud le problème :

Minimiser  $\{n d_F(x(0), x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \mid x \in B_{p,A}(x_0, \varepsilon/2)\}$  pour un  $n \geq 1$

Si nous supposons le contraire, alors pour tout  $n \geq 1$  il existe :

$$y_n \in B_{p,A}(x_0, \varepsilon/2) \quad \text{tel que} \quad :$$

$$(a) \quad n d_F(y_n(0), y_n(T)) + \int_0^T L(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) dt < \int_0^T L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) dt .$$

Mais d'après ii) :

$$\begin{aligned} \int_0^T L(t, y_n, \dot{y}_n) dt &\geq \int_0^T L(t, x_0, \dot{x}_0) dt - \int_0^T k_{x_0}(t) [ \|x_0(t) - y_n(t)\| + \|\dot{x}_0(t) - \dot{y}_n(t)\| ] dt \\ &\geq \int_0^T L(t, x_0, \dot{x}_0) dt - \|k_{x_0}\|_q (1+T) \varepsilon . \end{aligned}$$

Donc :

$$\delta_n = d_F(y_n(0), y_n(T)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Soit alors  $\gamma > 1$ . Pour tout  $n \geq 1$  choisissons,  $(a_n, b_n) \in F$  tel que :

$$\|(y_n(0) - a_n, y_n(T) - b_n)\| \leq \gamma \delta_n .$$

Pôsons :

$$z_n(t) = y_n(t) + (1-tT^{-1})(a_n - y_n(0)) + tT^{-1}(b_n - y_n(T)) .$$

Alors :

$$\dot{z}_n(t) = \dot{y}_n(t) - T^{-1}(a_n - y_n(0)) + T^{-1}(b_n - y_n(T))$$

Donc pour  $n$  assez grand nous avons :

- (1)  $z_n \in B_p(x_0, \varepsilon)$  et  $\dot{z}_n \in B_p(\dot{x}_0, \varepsilon)$
- (2)  $z_n \in B_{p,A}(x_0, \varepsilon)$
- (3)  $(z_n(0), z_n(T)) = (a_n, b_n) \in F$ .

Par suite, nous avons pour  $n$  assez grand :

$$\begin{aligned} \int_0^T L(t, x_0, \dot{x}_0) dt &\leq \int_0^T L(t, z_n, \dot{z}_n) dt \quad (\text{car } x_0 \text{ résoud } P[\ell, L] \text{ sur } B_{p,A}(x_0, \varepsilon)) \\ &\leq \int_0^T L(t, y_n, \dot{y}_n) dt + \int_0^T k_{x_0}(t) \|z_n(y) - y_n(t), \dot{z}_n(t) - \dot{y}_n(t)\| dt \\ &\quad (\text{d'après ii) et iii}) \\ &\leq \int_0^T L(t, y_n, \dot{y}_n) dt + 2 \gamma \delta_n (1+T^{-1}) \int_0^T k_{x_0}(t) dt \\ &\leq \int_0^T L(t, y_n, \dot{y}_n) dt + n d_F(y_n(0), y_n(T)) \\ &< \int_0^T L(t, x_0, \dot{x}_0) dt \quad (\text{d'après (a)}) \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner une condition nécessaire dans le cas où  $\ell$  est la fonction indicatrice d'un fermé de  $E \times E$ .

### 3.6. Proposition

Si  $L$  vérifie les hypothèses i), ii), iii) et iv), si  $\ell$  est la fonction indicatrice d'un ensemble fermé  $F$  dans  $E \times E$  et si  $x_0$  donne un minimum local pour le problème  $P[\ell, L]$ , alors il existe  $\zeta \in A_{E_s}^q$ , telle que :

$$(\xi(t), \zeta(t)) \in \partial L_t(x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad \text{p.p.}$$

et

$$(\zeta(0), -\zeta(T)) \in N_F(x_0(0), x_0(T))$$

Démonstration :

D'après le lemme précédent, il existe  $n \geq 1$  tel que  $x_0$  donne un minimum local pour le problème  $P[nd_F, L]$ . Nous pouvons alors appliquer la proposition 3.4. Ainsi il existe  $\zeta \in A_{E_s}^q$ , telle que :

$$(\xi(t), \zeta(t)) \in \partial L_t(x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad \text{p.p.}$$

et

$$(\zeta(0), -\zeta(T)) \in \partial(\text{nd}_F)(x_0(0), x_0(T)) \quad .$$

Mais d'après les rappels 1) nous avons :

$$\partial d_F(x_0(0), x_0(T)) \subset N_F(x_0(0), x_0(T)) \quad . \quad \square$$

Les résultats précédents peuvent bien sûr s'appliquer à certains problèmes d'optimisation portant sur une équation différentielle multivoque

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t))$$

où  $\Gamma$  est une multi-application de  $[0, T] \times E$  dans les parties non vides de  $E$ , avec  $E$  espace de Banach séparable, en faisant quelques hypothèses sur  $\Gamma$ . Pour ceci, nous renvoyons le lecteur à THIBAUT [3].

#### BIBLIOGRAPHIE

- BOURBAKI N. [1] Espaces vectoriels topologiques, ch.3,4,5, première éd., Hermann, Paris.  
 [2] Intégration. ch. 6, première éd., Hermann, Paris.
- CLARKE F. [1] Generalized gradients and applications. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 205 (1975), pp.247-262.  
 [2] La condition hamiltonienne d'optimalité. C.R. Acad. Sc. Paris, 280 (1975), pp.1205-1207.  
 [3] The Euler-Lagrange differential inclusion, J. of Diff. Eq. 19 (1975), pp.80-90.  
 [4] A new approach to Lagrange multipliers. Mathematics of operations research. vol.1, N° 2 (1976) pp.165-174.  
 [5] The generalized problem of Bolza, SIAM J. Control Optimization, 14, (1976), 682-699.
- DINCULEANU N. [1] Integration on locally compact spaces. Noordhoff International Publishing (1974).
- ROCKAFELLAR T. [1] Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. J. Math. An. Appl. 32 (1970) pp.174-222.  
 [2] Existence and duality theorems for convex problems of Bolza. Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971) pp.1-39.
- THIBAUT L; [1] Quelques propriétés des sous-différentiels de fonctions réelles localement lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable. Séminaire d'Analyse Convexe de Montpellier (1975), exposé n°16 et C.R. Acad. Sc. Paris, 282 (1976) pp.507-510.  
 [2] Problème de Bolza dans un espace de Banach séparable. C.R. Acad. Sc. Paris, 282 (1976) pp. 1303-1306.  
 [3] Propriétés des sous-différentiels de fonctions localement lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable. Applications. Thèse de spécialité, Montpellier (1976).