MÉMOIRES DE LA S. M. F.

F. BERTRANDIAS
J.-J. PAYAN

p-extensions abéliennes

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 33-37
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__33_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, P.33 à 37

p-EXTENSIONS ABELIENNES

par

Françoise BERTRANDIAS et Jean-Jacques PAYAN

(exposé par F. BERTRANDIAS)

-:-:-:-

On se propose de donner quelques propriétés des p-extensions abéliennes d'un corps k contenant, pour tout entier $n \geq 1$, les racines p^n-èmes de 1 ; on supposera k différent de k^p, et la caractéristique de k différente de p.

1. - Sous-groupe de k^* associés à une p-extension abélienne

Soit K une p-extension abélienne d'exposant non borné de k. Pour tout entier $n \geq 1$, soit le sous-groupe de k^* :

$$F_n = K^{*p^n} \cap k^* .$$

On voit facilement que $K = \bigcup_{n \geq 1} k(F_n^{p^{-n}})$.

On montre que la suite (F_n) vérifie les propriétés suivantes :

(i) quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k^{*p^n} \subset F_n \not\subset k^{*p}$,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n^p \subset F_{n+1}$,

(iii) quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $i \in \mathbb{N}$, $F_{n+i} \cap k^{*p^i} \subset F_n^{p^i}$.

Réciproquement, si une suite de sous-groupes F_n de k^* vérifie les conditions (i), (ii), (iii) on montre que le corps $K = \bigcup_{n \geq 1} k(F_n^{p^{-n}})$ est une p-extension abélienne, et que $K^{*p^n} \cap k^* = F_n$.

D'où le résultat :

PROPOSITION 1. - L'ensemble des p extensions abéliennes d'exposant non borné K de k et l'ensemble des suites de sous-groupes $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de k^* vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) sont en bijection, cette bijection étant donée par :

$$F_n = K^{*p^n} \cap k^* \quad \underline{\text{et}} \quad K = \bigcup_{n \geq 1} k(F_n^{p^{-n}}) .$$

2. - Limites

Soient $n \leq m$ deux entiers ; la suite (F_n) vérifiant la condition (ii), on a l'inclusion : $F_n^{p^{m-n}} \subset F_m$; l'application $x \to x^{p^{m-n}}$ de F_n dans F_m définit par passage au quotient, une application $i_{n,m} : F_n/k^{*p^n} \to F_m/k^{*p^m}$; on voit que $(F_n/k^{*p^n} ; j_{n,m})$ est un système inductif de groupes, dont la limite inductive sera notée $\varinjlim F_n/k^{*p^n}$.

De manière analogue, la suite (F_n) vérifiant la condition (iii), on a l'inclusion : $F_m \subset F_n$; l'injection canonique de F_m dans F_n définit par passage au quotient une application $j_{n,m} : F_m/k^{*p^m} \to F_n/k^{*p^n}$; on voit que $(F_n/k^{*p^n} ; j_{n,m})$ est un système projectif de groupes, dont la limite projective sera notée $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$.

Notons $G = \mathrm{Gal}(K|k)$ et, pour tout entier $n \geq 1$, μ_{p^n} le groupe des racines p^n-èmes de 1 contenues dans k . On pose $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mu_{p^n}$. $\mathrm{Hom}_c(G,X)$ désigne le groupe des homomorphismes continus du groupe G dans un groupe topologique X .

La théorie de Kummer ([1]) montre que l'application

$$f_n : F_n/k^{*p^n} \to \mathrm{Hom}_c(G,\mu_{p^n}) \quad ,$$

définie par :

$$f_n : x\, k^{*p^n} \in F_n/k^{*p^n} \to \left(\sigma \in G \to \frac{\sigma(x^{p^{-n}})}{x^{p^{-n}}}\right) \quad ,$$

est un isomorphisme de groupes.

On vérifie facilement que le système d'applications (f_n) est un morphisme inductif (resp. projectif) lorsqu'on munit $(\mathrm{Hom}_c(G,\mu_{p^n}))$ de sa structure naturelle de système inductif de groupes (resp. de système projectif de groupes). D'où le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - <u>Les applications</u> :

$$\varinjlim f_n : \varinjlim F_n/k^{*p^n} \to \varinjlim \mathrm{Hom}_c(G, \mu_{p^n})$$

<u>et</u>

$$\varprojlim f_n : \varprojlim F_n/k^{*p^n} \to \varprojlim \mathrm{Hom}_c(G, \mu_{p^n})$$

<u>sont des isomorphismes de groupes.</u>

Si on munit (μ_{p^n}) de sa structure naturelle de système inductif, on voit que l'application canonique :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(G,\mu_{p^n}) \to \mathrm{Hom}_c(G,\varinjlim \mu_{p^n}) = \mathrm{Hom}_c(G,\mu_{p^\infty})$$

est un isomorphisme de groupes ([2] exposé 6, prop. 7) (μ_{p^∞} est muni de la topologie discrète).

De manière analogue, si on munit (μ_{p^n}) de sa structure naturelle de système projectif, on vérifie que l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_c(G,\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_c(G, \varprojlim \mu_{p^n}) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_c(G,\mu_{p^n})$$

est un isomorphisme de groupes. ($\mathbb{Z}_p$ est le groupe additif des entiers p-adiques).

La proposition 2 permet donc d'énoncer le :

COROLLAIRE. - On a les isomorphismes canoniques de groupes :

$$\varinjlim F_n/k^{*p^n} \simeq \mathrm{Hom}_c(G, \mu_{p^\infty})$$
$$\varprojlim F_n/k^{*p^n} \simeq \mathrm{Hom}_c(G, \mathbb{Z}_p) .$$

3. - p-extensions abéliennes sans torsion

G , comme pro-p-groupe, est muni d'une structure de $\mathbb{Z}_p$-module. On montre le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - G est sans torsion si, et seulement si, pour tout entier $n \geq 1$, l'application $j_{n,n+1} : F_{n+1}/k^{*p^{n+1}} \to F_n/k^{*p^n}$ est surjective.

On remarque que la suite $F_n = k^*$ satisfait les conditions (i), (ii), (iii) et les hypothèses de la proposition 3. On en déduit le :

COROLLAIRE. - La p-extension abélienne maximale de k^* est d'exposant non borné, et son groupe de Galois est sans torsion.

Si on munit, pour tout entier $n \geq 1$; le groupe F_n/k^{*p^n} de la topologie discrète, et le groupe $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$ de la topologie de la limite projective, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 4. - Si G est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, le groupe topologique $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$ est compact.

Si le groupe $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$ est compact, et si G est sans torsion, alors G est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini. Dans ce cas, le groupe $\varprojlim F_n/k^{*p^n}$ est (non canoniquement) isomorphe à G .

4. - Etude d'un cas particulier

Dans ce paragraphe, on suppose que k est le complété d'une extension algégrique du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, contenant pour tout entier n, les racines p^n-èmes de 1, et vérifiant : $k \neq k^p$.

On note $|\ |$ la valeur absolue p-adique de k. On munit k^* de la topologie définie par cette valeur absolue, et les groupes quotients de k^* de la topologie quotient.

On démontre les résultats suivants (les lemmes 1 et 2 servant d'étapes pour démontrer le lemme 3) :

LEMME 1. - Tout disque de centre x et de rayon $|p\,x|_-$ de k^* rencontre $\bigcap_{n \geq 1} k^{*p^n}$.

LEMME 2. - La famille de sous-groupes ouverts $(k^{*p^i} / \bigcap_{n \geq 1} k^{*p^n})_{i \in \mathbb{N}^*}$ du groupe topologique $k^* / \bigcap_{n \geq 1} k^{*p^n}$ est une base de voisinages de l'élément neutre.

LEMME 3. - Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de k^* telle que la famille $(\alpha_n k^{*p^n})_{n \geq 1}$ soit décroissante. Alors $\bigcap_{n \geq 1} \alpha_n k^{*p^n}$ est non vide.

Le lemme 3 permet de démontrer les 2 propositions suivantes :

PROPOSITION 5. - L'application canonique du groupe $k^* / \bigcap_{n \geq 1} k^{*p^n}$ dans le groupe $\varprojlim k^*/k^{*p^n}$ (muni de la topologie de la limite projective, les groupes k^*/k^{*p^n} étant discrets) est un isomorphisme de groupes topologiques.

PROPOSITION 6. - Soit K une Γ-extension de k, c'est-à-dire une extension abélienne telle que $\mathrm{Gal}(K|k) \simeq \mathbb{Z}_p$. Il existe un élément α de k tel que $k = \bigcup_{n \geq 1} k(\alpha^{p^{-n}})$.

Remarque. - Si on ne suppose plus k complet, la proposition 6 devient fausse. Soit par exemple $k = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_n)$, où ζ_n est une racine primitive p^n-ème de 1. Il est facile de voir que l'extension $K = \bigcup_{n \geq 1} k(\alpha_n^{p^{-n}})$, où :

$$\alpha_n = (1-\zeta_1)(1-\zeta_2)^p \dots (1-\zeta_n)^{p^{n-1}} ,$$

est une Γ- extension de k, et qu'elle n'est pas de la forme $\bigcup_{n \geq 1} k(\alpha^{p^n})$, avec $\alpha \in k$.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.J. BIRCH. - Cyclotomic fields and Kummer extensions in : Cassels-Fröhlich. Algebraic Number Theory Acad. Press, 1967.

[2] G. POITOU. - Cohomologie galoisienne des modules finis. Dunod, 1967.

-:-:-:-

Faculté des Sciences de Grenoble
Département de Mathématiques
Boîte Postale n° 116
38 - Saint-Martin-d'Hères (France)