MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Hommage à Edmond Combet

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 46 (1991), p. 7-13
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__7_0>

Hommage à Edmond Combet

par

André LICHNEROWICZ
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

Nous voici donc réunis ici, aujourd'hui, dans ce Département de Mathématique qu'il a tant aimé et animé, pour rendre à Edmond COMBET l'hommage qui lui est dû.

Exposée dans une vingtaine de publications denses et profondes, son oeuvre a toujours été à l'avant-garde des progrès dans les champs auxquels il avait choisi de s'intéresser. Il a été l'un des premiers à œuvrer systématiquement dans ce qu'on nomme désormais l'Analyse Globale sur les variétés, et ce pour des raisons venues essentiellement de la Physique Mathématique. Il est un analyste profond, un excellent géomètre et s'est toujours passionné pour la Physique Quantique. Quelle que soit notre volonté commune à Bourguignon et à moi-même, il nous sera impossible, faute d'une compétence étendue à tout le champ labouré par Combet, faute de temps aussi, d'analyser exhaustivement une oeuvre pleine à la fois de magnificence et d'humilité. Je me propose ici, avec partialité, d'évoquer seulement quelques-uns des articles de Combet qui m'ont le plus intéressé.

C'est en 1960 que j'ai eu le privilège de connaître Edmond Combet. Malgré sa jeunesse, il révélait déjà une personnalité humaine entièrement formée et fort attachante. Quant à la personnalité scientifique, elle devait se développer à une vitesse foudroyante. A l'époque, je m'intéressais à la quantification des champs physiques sur un espace-temps courbe et j'exposais au Collège de France ma problématique d'alors, et les résultats de certaines de mes recherches, ce qui eut le don d'intéresser Combet. Je me bornerai à esquisser cette problématique pour un champ scalaire, parce qu'elle est étroitement liée aux premiers grands travaux de Combet des années 1961-1965.

Prenons pour espace-temps une variété lorentzienne V_4 globalement hyperbolique ; un champ scalaire u vérifie l'équation de Klein-Gordon :

$$Lu \equiv (\Delta - m)u = 0 \tag{1}$$

où Δ est le laplacien de G. de Rham sur les scalaires ; L est self-adjoint en un sens évident. A chaque point x de V_4 sont associées deux solutions élémentaires en x' (au sens de Schwartz) *uniques* $G^{\pm}(x,x')$ à supports dans le demi-conoïde caractéristique futur (resp. passé) de sommet x. La différence $G(x,x') = G^{+}(x,x') - G^{-}(x,x')$ est solution de l'équation homogène définie par L et est antisymétrique en (x,x') parce que L est self-adjoint. On peut montrer que G joue un rôle essentiel pour décrire par composition de Volterra les solutions du problème de Cauchy. J'ai nommé G le *propagateur antisymétrique de L* parce qu'il est l'exacte généralisation sur un espace hyperbolique courbe du célèbre propagateur D de Jordan-Pauli du cas plat, défini en termes de transformation de Fourier. Si u est à valeurs opératorielles relativement à un espace de Hilbert, c'est $(1/i)G(x,x')I_d$ qui donne le commutateur $[u(x),u(x')]$.

La définition d'une généralisation du propagateur D_1 est beaucoup plus délicate. Ce doit être une solution $G_1(x,x')$ de l'équation homogène définie par L, symétrique en x,x' qui, outre une condition de positivité de l'énergie, vérifie

$$G(x,x') = \int_\sigma [G_1(x,y)\partial_\lambda G_1(x',y) - G_1(x',y)\partial_\lambda G_1(x,y)]d\sigma^\lambda(y) \tag{2}$$

où ce produit de Volterra est pris sur une hypersurface spatiale σ.

Le noyau G_1 définit une application $J : u \longrightarrow u_1$ dans l'espace des solutions de (1) avec

$$u_1(x') = \int_\sigma [u(y)\partial_\lambda G_1(x',y) - G_1(x',y)/\partial_\lambda u(y)]d\sigma^\lambda(y)$$

Si l'on pose pour 2 solutions de (1)

$$b(u,v) = \int_\sigma [u(y)\partial_\lambda v(y) - \partial_\lambda u(y)v(y)]d\sigma^\lambda(y)$$

on doit avoir $b(u,u_1) \geqslant 0$. S'il en est ainsi $G \pm iG_1$ sont les noyaux définissant pour le champ les opérateurs de création-annihilation.

Un fait remarquable concernant les solutions élémentaires et G : ceci s'étend aux p-formes et à leur laplacien de G. de Rham. Alors que dans le cas plat seul G (et G_1) importe, on obtient pour les p-formes des propagateurs antisymétriques $G_{(p)}$ qui sont reliées par de remarquables relations différentielles $d_x G_{(p)}(x,x') = \delta_{x'} G_{(p+1)}(x,x')$. Ces relations sont précisément celles qui permettent d'évaluer rigoureusement les commutateurs de formes à valeurs opératorielles. On a ainsi pour les mésons scalaires et vectoriels, par le champ électromagnétique des commutateurs rigoureux sur un espace-temps courbe.

Telle est la problématique générale qui conduit à beaucoup de questions difficiles d'analyse. Différents auteurs dont Combet ont réussi à établir sous des hypothèses générales que G_1 existe.

En collaboration avec Moreno, il a montré en 1975 que dans le cas stationnaire G_1 existe et est unique, moyennant une condition utilisant la symétrie. Mais surprise, en l'absence de symétrie, G_1 n'est pas unique et on est conduit à des quantifications distinctes ayant entre elles des liens subtils, encore insuffisamment approfondis. L'existence de cette situation (stationnaire et non stationnaire) est établie pour les spins 0, 1/2, 1.

Le cas du champ gravitationnel est spécialement délicat. Les équations d'Einstein étant non linéaires, j'ai été amené à distinguer un champ gravitationnel macroscopique les vérifiant et constituant le background de l'espace-temps, et un champ microscopique, variation ou fluctuation du champ ordinaire décrit par un tenseur symétrique h d'ordre 2 soumis à des équations de champ obtenues par variation du tenseur de Ricci. C'est cette variation qui fait apparaître pour h un laplacien naturel sur les tenseurs symétriques d'ordre 2, laplacien qui est devenu classique. Il suffit d'une condition sur la valeur d'estimation de h pour que la cohérence soit retrouvée.

C'est à cet aspect des choses que Combet s'intéresse d'abord. Dans une série de trois notes (1961-1962), il étudie la possibilité de quantification simultanée des champs gravitationnels, électromagnétiques et pouvoir diélectrique (scalaire) en interactions sous leur forme variée, à partir d'une représentation de V_4 comme espace-quotient dans l'esprit de la théorie de Kaluza-Klein. Il obtient ainsi des commutateurs intéressants qui ont refait surface vers 1975 chez les physiciens théoriciens (en particulier Ashtekar).

Mais déjà il a entrepris autre chose de plus ambitieux : mettre en œuvre la construction des solutions élémentaires scalaires, tensorielles et spinorielles du laplacien correspondant Δ d'une variété pseudoriemannienne analytique, hyperbolique ou ultrahyperbolique, à partir d'un transfert sur la variété, des distributions $(P\pm i0)^\lambda$ de Guelfand-Chilov (le premier volume de leur théorie des distributions venait de paraître en Français) où λ est complexe et il est amené à poser $(P\pm i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_-^\lambda$. Dans le cas scalaire, il obtient ainsi, au prix d'un gros travail, des expressions explicites des solutions élémentaires au voisinage d'un point x' fixé en termes des distributions P_+^λ et P_-^λ ayant un sens géométrique, dans les cas hyperbolique et ultrahyperbolique (signature (p,q) ; p>1,q>1). On doit noter que si l'on connaissait, grâce à Madame Choquet, l'existence de solutions élémentaires dans le cas ultrahyperbolique, on doit à Combet la mise en évidence de solutions élémentaires privilégiées (il n'y a pas unicité ici) qui par exemple demeureront invariantes sous l'action éventuelle d'un groupe connexe d'isométries. Combet montre comment ses résultats s'étendent à l'opérateur ($\Delta + B^\rho\partial_\rho+C$), où B est un vecteur, C un scalaire et il les raccorde avec ce qui était connu dans le cas hyperbolique normal. Dans son optique, il met en particulier en évidence, à partir de la partie imaginaire des solutions élémentaires, une solution invariante par symétrie de l'équation homogène susceptible de donner un propagateur G_1 (ici T_3 dans ses notations), solution qui sera au point de départ de ses travaux sur G_1.

Ces résultats sont ensuite étendus aux cas tensoriel et spinoriel et entièrement explicités par les spins 1 et 1/2. Ce gros travail dont les formules ont été fort utiles à d'autres chercheurs (par exemple Moreno, Chilov, moi-même) constitue la thèse de Combet soutenue en 1963 et parue dans le Mémorial des Sciences Mathématiques en 1965. Je puis personnellement porter témoignage de l'estime que Guelfand portait à ce travail. Cette thèse met en évidence la puissance de Combet comme analyste. Il montre qu'il est capable de maîtriser de haut des choses difficiles mais qu'il sait ne pas se noyer dans les détails ; son ambition est de fournir des formes explicites de nature aussi géométriques que possible.

Dans la même lignée, Combet donne en 1970 un long et remarquable article fort connu dans les Annales de l'Ecole Normale, article intitulé *Paramétrix et invariants sur les variétés compactes*. Il s'agit cette fois de géométrie proprement riemannienne et des sections d'un fibré vectoriel ξ, muni d'une dérivation covariante L, ayant pour base une variété riemannienne compacte (M,g) de classe C^∞. L'opérateur différentiel Δ sur les sections de ξ est construit à partir de la métrique et de la dérivation L et généralise le laplacien usuel ; il est elliptique.

ξ' étant l'adjoint géométrique de ξ, on considère le produit tensoriel $\xi\otimes\xi'$ des fibrés ξ, ξ' basé sur M×M. Une paramétrix P de Δ est un noyau très régulier, élément de $\mathcal{D}'(\xi\otimes\xi' \mid V)$ où V est un voisinage de la diagonale M×M, pour lequel

$$\Delta P(x,y) = \delta(x,y) + Q(x,y)$$

Q étant une fonction C^∞ sur V. Une telle paramétrix peut certes être obtenue à partir de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Mais Combet observe qu'il est possible de s'en passer et d'obtenir une paramétrix de manière plus géométrique en en cherchant un développement selon les puissances paires de la distance géodésique de (M,g). Cette méthode est en fait profondément semblable à celle de sa thèse et elle pourrait s'appliquer à une métrique de signature (p,q) convenable. La construction fait apparaître ici une suite de noyaux $\{u_i\}$ de classe C^∞ dont certains sont apparus dans des cas particuliers (voir par exemple les travaux de Berger sur le spectre des variétés riemanniennes compactes).

Ces noyaux $\{u_i\}$ interviennent dans les paramétrix du problème de Cauchy relatif à l'opérateur de la chaleur $(\partial/\partial t + \Delta)$. Une bonne théorie venait alors d'apparaître due à Kotaké ; elle établissait l'existence et l'unicité d'un noyau E - dit noyau de diffusion - relatif à cet opérateur. Soit Tr l'extension aux sections de $\xi\otimes\xi'$ du crochet qui, à une section de ξ et à une section de ξ', associe une mesure régulière sur M. Cette mesure permet d'aborder le problème suivant : que la suite $\{u_i\}$ nous apprend-elle sur la structure topologique de M ou ξ ? A partir du théorème de l'indice et d'une approche de Kotaké donnant une expression intégrale en termes des Tr u_i des nombres de Lefschetz, on peut obtenir une formule générale qui, dans les cas particuliers du lagrangien sur les p-formes ou du lagrangien spinoriel, refournit des formules intégrales donnant $\chi(M)$ ou $\hat{A}(M)$. Malgré l'humilité avec laquelle il est rédigé, cet article est important, car il contient deux ou trois idées, neuves à l'époque, pour une approche relativement élémentaire, des idées qui nous aident à mieux comprendre et dominer la situation. C'est ce que constate Dieudonné qui fait sur cet article un rapport enthousiaste.

*

De 1974 à 1981 environ, Combet s'intéresse particulièrement aux intégrales exponentielles et à leurs applications, à leurs rapports avec la théorie des ondes, le contrôle optimal et la physique quantique. Ses recherches l'amènent à publier chez Springer un volume de Lecture Notes intitulé : "*Intégrales exponentielles. Développements asymptotiques, propriétés lagrangiennes* ". Je ne suis pas suffisamment compétent pour analyser vraiment le travail de Combet dans ce champ. Tout ce que je puis dire est qu'il fut fort apprécié des spécialistes et que, sur ce thème, Combet a été l'un des trois conférenciers français invités à l'une des grandes Réunions des Mathématiciens d'expression latine, par un comité scientifique international. Avec son approche de l'étude des singularités des distributions de Fourier à symboles homogènes, le travail a montré aux yeux de tous ses dons d'analyste original et profond.

J'en viens à la dernière période, une période durant laquelle nous nous sommes retrouvés en interaction. Vers 1978, le Collège de France prit une initiative : autoriser ses professeurs à faire une part de leur enseignement officiel (au plus le quart) hors de Paris. Combet alors à la tête du Département de Lyon entendit parler de cette initiative et m'invita à donner à Lyon un cycle de conférences analogue à ce qu'on pouvait faire au Collège. J'acceptais avec grand plaisir, pouvant retrouver ainsi, pour un temps, beaucoup de vieux amis. A ma demande, ce cycle ne fut pas une part de mon enseignement officiel côté Collège, mais le règlement nous permit, par accord entre nos deux maisons, d'éditer de belles affiches cosignées par l'Administrateur du Collège et le Président de l'Université de Lyon.

Ce cycle de six conférences sur des sujets choisis par Combet et étalé sur deux semaines fut à la fois un grand plaisir, mais aussi assez fatigant. L'auditoire était légitimement exigeant. J'y exposai essentiellement la théorie des déformations formelles des crochets de Poisson attachés à des variétés symplectiques et la notion de star-produit. Cette théorie motivée par la recherche d'une quantification invariante sur l'espace de phase avait été fondée et développée depuis 1977 par M. Flato et moi. Elle fournit une extension géométrique de la quantification de Weil-Wigner et en particulier du produit et du crochet de Moyal qui correspondent à $R^n \times R^n$ muni de sa structure symplectique canonique.

Parmi les participants figuraient entre autres Braconnier, Ouzilou, Patissier. Tous firent des contributions remarquablement intéressantes dans la voie qui se trouvait ainsi dégagée. Il y eut en particulier de la part de Braconnier une approche purement algébrique. En 1982, en collaboration avec Patissier, Edmond Combet a donné une analyse des rapports existant entre ce qu'il nomme le calcul de Weyl tel qu'il a été récemment développé par Grossmann, Unterberger, Voros et peut-être essentiellement par Hörmander, et la théorie formelle des déformations qui a suscité des développements cohomologiques et des travaux d'analyse (Moreno, Kammerer, etc.). Nous savons ainsi depuis 1982 que, malgré les obstructions cohomologiques, il existe toujours sur une variété symplectique de dimension finie, des star-produits (M. de Wilde et Pierre Lecomte). Le problème est encore ouvert pour certaines variétés symplectiques de dimension infinie qui s'introduisent naturellement en théorie des champs. Sensibilisée par les réflexions remarquables du regretté Berezin, l'école russe avec Drinfeld et Manin a commencé à explorer le champ des généralisations des crochets de Poisson en termes de super-variétés particulières et de leurs déformations éventuelles. Omori vient de faire un excellent article. Ajouterai-je que la notion de star-produit est en profonde interaction avec certains aspects de la géométrie non commutative d'Alain Connes, sans que ni Connes, ni moi-même ayons encore eu le courage d'exposer clairement ces interactions !

Dans l'article cité, Combet réfléchit profondément sur les rapports entre le calcul de Weyl tel qu'il est vu par Hörmander en termes d'opérateurs pseudo-différentiels et l'analyse spectrale en termes de star-produits telle que nous l'avons esquissée en 1978 et perfectionnée partiellement depuis. L'approche par star-produit permet au moins d'envisager le cas de la quantification pour un espace de phase qui n'est pas nécessairement un fibré cotangent. La grande culture de Combet concernant les opérateurs pseudo-différentiels et la puissance de sa pensée auraient dû lui permettre maintenant, si la maladie ne l'avait pas frappé, de faire progresser de manière décisive la quantification par star-produit. C'était là l'une de ses intentions de travail.

*

On voit l'intérêt d'une telle oeuvre. Quant à l'homme, avec son dévouement, son âme de montagnard et son extraordinaire rayonnement humain, nous l'avons tous trop connu pour que j'y insiste. Dirai-je qu'avec sa modestie presque pathologique, son sens aigu des valeurs mathématiques et son goût pour les vrais problèmes, il a permis à beaucoup de mathématiciens d'aller plus loin et de s'accomplir. Il a été le meilleur exemple du leader malgré lui, toujours prêt à sourire, à écouter attentivement et à conseiller discrètement.

Il reste pour nous, je crois, le modèle de ce qu'on peut nommer un gentilhomme de la Science.