JEAN FRESNEL

Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 83-89
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__83_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 83 à 89

FONCTIONS ZETA p-ADIQUES DES CORPS DE NOMBRES ABELIENS REELS

par

Jean FRESNEL

-:-:-:-

1. - Introduction

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\mathbb{Q}$ le corps de nombres rationnels, $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\mathbb{Z}_p$ son anneau de valuation, $\mathfrak{M}$ son idéal de valuation.

Soit K une extension abélienne, réelle, finie du corps $\mathbb{Q}$. La fonction Zêta du corps K est définie par

$$Z(s,K) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{q}} \frac{1}{(1-N(\mathfrak{q})^{-s})} \qquad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 1 ,$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers de K non nuls, où le produit est étendu à tous les idéaux premiers de K et où N désigne la norme absolue.

D'autre part soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs du corps K , à chaque $\chi \in \mathfrak{X}$ on associe la fonction de Dirichlet $L(.,\chi)$ définie par

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{q} \frac{1}{1-\chi(q)q^{-s}}$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers. On peut alors factoriser la fonction Zêta sous la forme

$$Z(s,K) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} L(s,\chi) \quad .$$

En 1964, [8] Kubota et Leopoldt définirent un analogue p-adique des fonctions $L(.,\chi)$. Partant de la remarque, que

$$L(1-m,\chi) = - \frac{B^m(\chi)}{m}$$

où $B^m(\chi)$ est le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli [10], [5] relatif au caractère χ et qu'il est algébrique, ils montrèrent qu'il existait une application continue $s \to L_p(s,\chi)$ de $\mathbb{Z}_p$ dans une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$ telle que

$$L_p(1-m,\chi) = (1-\chi(p)\, p^{m-1})\, L(1-m,\chi)$$

pour $m \equiv 0 \mod(p-1)$ si $p \neq 2$ (resp $m \equiv 0 \mod 2$ si $p = 2$).

En 1967 [5] en utilisant la technique l'interpolation p-adique [1] nous avons montré la relation qu'il y avait entre les fonctions L p-adiques et l'existence de congruences entre les nombres de Bernoulli de type Kummer.

En 1967, [7] Iwasawa a mis en évidence une relation entre la p-composante du groupe des classes d'idéaux,et la Γ-extension fondamentale au-dessus du corps K est les fonctions L p-adiques.

Nous proposons ici de donner une construction des fonctions L p-adiques qui rappelle les fonctions $L(.,\chi)$ définies comme série

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/_{n^s} .$$

Grossièrement on considère la série de Taylor

$$G(s,\chi,T) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{T^n}{n^s}$$

et l'on montre à peu près que la fonction $s \to G(s,\chi,1)$ est la fonction L p-adique. Il est à peu près clair que tout le problème consiste à donner un sens à $G(s,T,1)$.

2. - Construction des fonctions $L_p(.,\chi)$

Dans ce paragraphe nous rappelerons la définition du caractère θ_p [8][5] et nous introduirons deux fonctions, $(s,\chi) \to h(s,\chi)$ et $(s,\chi) \to k(s,\chi)$ dont nous étudierons les propriétés d'analyticité et qui nous permettrons de définir les fonctions $L_p(.,\chi)$.

Soient p un nombre premier distinct de 2 et θ_p l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ définie par

$$\theta_p(a) = \lim_{n\to\infty} a^{p^n} \qquad \text{(limite p-adique)}$$

(c'est-à-dire $\theta_p(a) \equiv a \mod p\,\mathbb{Z}_p$ et $(\theta_p(a))^p = \theta_p(a)$).

Si $p = 2$; θ_2 est l'application de $\mathbb{Z}_2$ dans $\mathbb{Z}_2$ définie par

$$\theta_2(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \in 2\,\mathbb{Z}_2 \\ 1 & \text{si} \quad a \equiv 1 \mod 4\,\mathbb{Z}_2 \\ -1 & \text{si} \quad a \equiv -1 \mod 4\,\mathbb{Z}_2 \end{cases} .$$

Si n est un entier rationnel θ_p^n est l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant :

$$\theta_p^n(a) = \begin{cases} \theta_p(a)^n & \text{si} \quad a \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad a \in p\,\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

Si p est un nombre premier, ε_p est l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant :

$$\varepsilon_p(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad a \in p\,\mathbb{Z}_p \end{cases} .$$

On a donc $\theta_p^0 = \varepsilon_p$.

On voit que l'expression $\frac{1}{p}\left(\frac{x}{\theta_p(x)} - 1\right)$ appartient à $\mathbb{Z}_p$ si $x \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p$. On définit ainsi une application ψ_p pour $p \neq 2$ de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ par

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}\left(\frac{x}{\theta_p(x)} - 1\right) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}_p - p\,\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si} \quad x \in p\,\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

et de même pour $p = 2$ on définit ψ_2 comme étant une application de $\mathbb{Z}_2$ dans $\mathbb{Z}_2$ satisfaisant :

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\theta_2(x)} - 1\right) & \text{si} \quad x \in Z_2 - 2\,Z_2 \\ 0 & \text{si} \quad x \in 2\,Z_2 \end{cases} .$$

Soit Ω_p un complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, alors la série

$$\varepsilon_p(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \binom{s}{k} \psi_p^k(x) \tag{1}$$

converge uniformément sur tout sous-disque circonférencié du disque D_1 non circonférencié de centre 0 et de rayon $|p|^{-1+1/p-1}$ si $p \neq 2$ (resp $|2|^{-1}$ si $p = 2$). Si $x \in \mathbb{Z}_p$ et si $s \in D_1$ nous noterons $\left(\frac{x}{\theta_p(x)}\right)^s$ la somme de la série (1). Il est clair que la fonction $s \to \left(\frac{x}{\theta_p(x)}\right)^s$ est analytique et bornée sur D_1 .

Ces notations étant précisées, nous allons définir les fonctions $L_p(\cdot,\chi)$ par l'introduction successive de deux fonctions $(s,\chi) \to h(s,\chi)$ et $(s,\chi) \to k(s,\chi)$.

La série de Taylor

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^s \frac{X^n}{n}$$

est convergente pour $s \in D_1$ et $|X| < 1$.

Si $s \in D_1$ et $|X| < 1$, nous posons

$$h(s,X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^s \frac{X^n}{n} . \tag{2}$$

Soit D_2 le domaine défini de la façon suivante :

$$D_2 = \{X \in \Omega_p \mid |1-X| \geq 1\} .$$

PROPOSITION 1 [2]. - Soit $s_o \in D_1$, alors la fonction $X \to h(s_o,X)$ est analytique sur D_2.

Désormais la fonction $X \to h(s_o,X)$ désignera le prolongement analytique à D_2 de la fonction $X \to h(s_o,X)$ définie sur D_1 par (2).

PROPOSITION 2 [2]. - Soit $x \in D_2$, alors la fonction $s \to h(s,X_o)$ est analytique et bornée sur D_1.

Rappelons que si χ est un caractère primitif de conducteur $f(\chi)$, si Z_f est une racine primitive $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité (si $\chi = \varepsilon$ le caractère trivial, nous posons $f(\varepsilon) = 1$ et $Z_f = 1$) la somme de Gauss associée à χ et Z_f est définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a)\, Z_f^a .$$

Si $|X| < 1$ et si $s \in D_1$ nous avons $\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, h(s,Z_f^a X) = - \sum_{n=1}^{\infty} \chi\, \varepsilon_p(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^s \frac{X^n}{n}$. On cherche donc à savoir si l'on peut faire $X = 1$, c'est-à-dire si l'on peut donner un sens à $h(s,Z_f^a)$ pour montrer que la fonction $(1-s) \to -\frac{\tau(\chi)}{f(x)} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\, h(s,Z_f^a)$ est la fonction $L_p(.,\chi)$. Tout d'abord, remarquons que si $(a,f) \neq 1$, nous avons $\bar{\chi}(a) = 0$, par suite le fait de savoir si $h(s,Z_f^a)$ a un sens ne se pose que pour $(a,f) = 1$. Il est alors clair que $Z_f^a \in D_2$ si et seulement si $f \neq p^e$. Ainsi pour satisfaire le cas où $f = p^e$ nous avons recours à un artifice. Nous remplaçons la fonction $h(.,.)$ par une fonction $k(.,.)$ et la fonction $X \to k(s_o,X)$ sera analytique sur un domaine contenant les Z_f^a même pour $f = p^e$.

Soit c un entier tel que $(c,p) = 1$, $c \neq 1$ et soit $k(s,X)$ la série de Taylor en X définie par

$$k(s,X) = h(s,X) - \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s h(s,X^c) . \tag{3}$$

LEMME 1. - Soit ξ une racine primitive $c^{\text{ième}}$ de l'unité. Si $s \in D_1$ et si $|X| < 1$ nous avons l'égalité

$$k(s,X) = - \sum_{i=1}^{c-1} h(s, \xi^i X) .$$

Soit D_3 le domaine suivant de Ω_p :

$$D_3 = \{X \in \Omega_p \,\big|\, \left|\frac{X^c-1}{X-1}\right| \geq 1\}$$

PROPOSITION 3 [2]. - Soit $s_o \in D_1$, alors la fonction $X \to k(s_o,X)$ est prolongeable analytiquement sur D_3 .

Comme pour la fonction $X \to h(s_o,X)$ désormais la fonction $X \to k(s_o,X)$ désignera le prolongement analytique à D_3 de la fonction $X \to k(s_o,X)$ définie sur D_1 par (3) .

PROPOSITION 4. - Soit $X_o \in D_3$, alors la fonction $s \to k(s,X_o)$ est analytique et bornée sur D_1 .

Désormais l'entier c choisi précédemment sera astreint aux conditions supplémentaires suivantes :

Si $\chi \neq \varepsilon$, $0 < c < p\, f(\chi)$, $\chi(c) \neq 1$ et $(c, pf(\chi)) = 1$.
Si $\chi = \varepsilon$, $0 < c < p^2$ et $c \neq 1$.

Ici encore il faut remarquer que l'entier c ainsi choisi dépend du caractère χ et du nombre premier p .

THEOREME 1 [2] . - Soit χ un caractère primitif non trivial. Alors la fonction

$$(1-s) \to -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a)\, k(s,Z_f^a)\, \frac{1}{1-\chi(c)\,\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

définie sur D_1 est la fonction $L_p(.,\chi)$. Elle est analytique et bornée sur D_1 .

THEOREME 2 [2] . - Soit c un entier associé au caractère trivial. Alors la fonction

$$(1-s) \to -\frac{k(s,1)}{1-\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est la fonction $Z_p(.,Q) = L_p(.,\varepsilon)$. Elle est méromorphe sur D_1 , elle a un seul pôle, il est en 1 , il est simple et a pour résidu $\frac{p-1}{p}$. De plus la fonction $s \to (s-1)\, Z_p\, (s,Q)$ est bornée sur D_1 .

Il nous est alors possible de déterminer une expression analytique p-adique du nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres abélien réel avec le résidu au point 1 de la fonction Zêta p-adique en utilisant une formule de Léopoldt [11] .

THEOREME 3 [2] . - Soit K un corps de nombres abélien réel de degré n , de déterminant d , de régulateur p-adique R_p , dont h est le nombre de classes d'idéaux et dont $Z_p(.,K)$ est la fonction Zêta p-adique, alors

$$\frac{2^{n-1}\, h\, R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\mathfrak{P}|p} (1-N(\mathfrak{P})^{-1})^{-1} \lim_{s\to 1} (s-1)\ Z_p(s,K)$$

3. - Problèmes

1) Trouver une démonstration directe de la formule p-adique des résidus (du théorème 3). En effet on interprête [9] le nombre de classes d'idéaux à peu de choses près comme l'indice d'un sous-groupe du groupe des unités et ceci en utilisant la formule complexe des résidus.

2) Unités circulaires. Dans le cas d'une extension cyclique [9] le sous-groupe des unités circulaires constitue un sous-groupe d'indice h (où h est le nombre de classes d'idéaux) du groupe des unités. Cette égalité ne peut s'interpréter comme un isomorphisme entre le groupe des classes d'idéaux et le quotient du groupe des unités par le sous-groupe des unités cyclotomiques. Quelle interprétation peut-on donner à cette égalité ?

3) Les fonctions Zêta p-adiques ont-elles des propriétés arithmétiques autres que le résidu au point 1 ?

4) Quelles sont les valeurs prises par les fonctions $L(s,\chi)$ aux points 3, 5, 7, ... ?

5) Les fonctions Zêta p-adiques et L p-adiques possèdent-eelles une relation fonctionnelle ?

6) Peut-on trouver des fonctions Zêta p-adiques pour les corps de nombres qui satisfassent la formule des résidus ? En d'autres termes peut-on connaître plus ou moins explicitement (par des relations de récurrence par exemple) les valeurs des fonctions Zêta sur les entiers négatifs ?

7) Quel est le rang p-adique du groupe des unités pour un corps de nombres [3] [4] [5] ?

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 117-160.

[2] AMICE Yvette et FRESNEL Jean. - Fonction Zêta des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica (à paraître).

[3] AX J. - On the units of an algebraic number field. Illinois J. of math. 9 (1965), pp. 584-589.

[4] BRUMER A. - On the units of algebraic number field Mathematika, vol. 14, part. 2, dec. 1967, n° 28, pp. 121-124.

[5] FRESNEL Jean. - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques. Annales de l'Institut Fourier. Tome XVII, fasc. 2, 1967, pp. 281-333.

[6] FRESNEL Jean. - Rang p-adique du groupe des unités d'un corps de nombres. Séminaire de Théorie des Nombres, 1968/69, n° 9, Bordeaux.

[7] IWASAWA Kenkichi. - On p-adic L-functions. Annals of math., vol. 89, n° 1, january 1969, pp. 198-205.

[8] KUBOTA T. and LEOPOLDT H.W. - Eine p-adishe theorie der Zeta werte. I Einführung der p-adisher Dirichletsen L. Funktionen Journal für die reine und ang. Math., t. 214/215, 1964, pp. 328-333.

[9] LEOPOLDT H.W. - Uber einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelschen Zahlkörpern. Abhandlungen der deutschen Akad. d. Wiss. z. Berlin Jahrgan, 1953, n° 2, pp. 1-48.

[10] LEOPOLDT H.W. - Eine verallgemeinerung der Bernoullishen Zahlen. Abd. Math. Sem. Hamburg, t. 22, 1958, pp. 131-140.

[11] LEOPOLDT H.W. - Zur Arithmetik in abelschen Zalhkorpen. Journal für die reine und ang. math. Band 209, Heft 1/2, 1962, pp. 54-71.

-:-:-:-

Faculté des Sciences de Bordeaux
Département de Mathématiques
351, cours de la Libération
33 - Talence (France)