

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CLAUDIO BAIOCCHI

Sur une équation différentielle abstraite à domaine variable ; applications aux problèmes mixtes, du type Cauchy-mêlé, pour l'équation de la chaleur

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 31-33

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__31_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ABSTRAITE A DOMAINE VARIABLE ;
 APPLICATIONS AUX PROBLEMES MIXTES, DU TYPE CAUCHY-MELE,
 POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR.

par

Claudio BAIOCCHI

On se donne $K, H, V(t), a(t, u, v), u_0, f(t)$ avec :

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} \underline{K, H \text{ sont des espaces de Hilbert séparables ; } K \text{ est inclus dans } H \text{ avec injection continue et image dense ;} \\ \end{array} \right.$
- (2) $V(t)$ est une famille de sous-espaces fermés de $K (t \in \mathbb{R}^+ =] 0, + \infty [)$;
- (3) $\left\{ \begin{array}{l} \{u, v\} \rightarrow a(u, v) \text{ est une famille, dépendant de } t \text{ de façon mesurable et bornée,} \\ \text{de formes bilinéaires continues sur } K, \text{ coërcives sur } V(t) \end{array} \right.$
- (4) $u_0 \in H$; $f(t) \in L^2(\mathbb{R}^+ ; K^*)$

(K^* = espace dual de K). On cherche $u(t)$ qui, dans un sens convenable, satisfait :

- (5) $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u(t) \text{ est une fonction "régulière" à valeurs dans } K, \text{ avec :}} \\ \text{(i) } u(t) \in V(t) ; \text{ (ii) } u(0) = u_0 ; \text{ (iii) } \frac{du}{dt} + A(t) u(t) = f(t) \end{array} \right.$

$A(t) \in \mathcal{L}(K, K^*)$ étant l'opérateur associé à la forme $a(t, u, v)$.

Par exemple si l'on se donne Ω ouvert de \mathbb{R}^n et Σ_0 sous-ensemble de $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$, et si l'on pose : $H = L^2(\Omega)$; $K = H^1(\Omega)$; $V(t) =$

$= \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma(t)} = 0\}$ où $\Gamma(t) = \{x \in \partial\Omega ; (x, t) \in \overline{\Sigma_0}\}$;

$a(t, u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$, on peut étudier

sous la forme (5) le problème mixte, du type Cauchy-mêlé, pour l'équation de la chaleur :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t) \quad \text{pour } x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \overline{\Sigma_0} ; \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0 \text{ sur } \Sigma - \overline{\Sigma_0} \end{array} \right.$$

(γ étant la normale à $\partial\Omega$).

Malheureusement, dans les nombreuses formulations jusqu'ici proposées

pour l'étude de (5) (cf. p.ex. [3], [4]; cf. aussi [2] pour une formulation plus générale où rentre aussi le cas des opérateurs $A(t)$ monotones), interviennent des hypothèses sur la variabilité du domaine $V(t)$ de $A(t)$ qui, traduites dans le cas concret du problème (6), imposent des restrictions sur Σ_0 . On va exposer ici une nouvelle formulation de (5) qui, appliquée au cas concret (6), donne un théorème d'existence et unicité sans aucune hypothèse sur l'ensemble Σ_0 portant la donnée de Dirichlet (pour les détails, la définition précise des espaces employés, et pour une bibliographie plus étendue on renvoie à [1]; ici on expose les idées essentielles).

Pour fixer la régularité de $t \rightarrow u(t)$ et pour imposer la condition (i) de (5) on suppose :

$$(7) \quad u(t) \in L^2(\mathbb{R}^+; V(t)) \cap H^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$$

(à savoir $t \rightarrow u(t)$ est de carré sommable à valeurs dans K , avec $u(t) \in V(t)$ p.p.; et une "demie dérivée" de u est de carré sommable à valeurs dans H).

Il ne s'agit pas de fonctions continues; il faut donc préciser le point (ii) de (5). A ce propos on introduit un "relèvement" $u_0 \rightarrow u_0(t)$ qui à tout $u_0 \in H$ fait correspondre une fonction $u_0(t)$ régulière et telle que $u_0(0) = u_0$; ce relèvement étant fixé, on traduit (ii) en imposant :

$$(8) \quad u(t) - u_0(t) \in H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$$

$$(H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+; H) = \{v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+; H) ; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \|v(t)\|_H^2 dt < +\infty\} ;$$

donc les éléments de $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$ sont, en quelque sorte, "nuls à l'origine"; dès que $u_0(0) = u_0$ (8) est donc une "formulation faible" de (ii)).

On rappelle maintenant que l'opérateur de dérivation $u \rightarrow u'$ opère de $H^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$ dans le dual de $H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$; pour $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$ et $v \in H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+; H)$ a donc un sens le crochet $\langle u', v \rangle$; ceci posé on traduit (iii) de (5) en imposant :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } v \in L^2(\mathbb{R}^+; v(t)) \cap H_{00}^{1/2}(\mathbb{R}^+; H) \text{ on a :} \\ \langle u', v \rangle + \int_{\mathbb{R}^+} a(t, u(t), v(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^+} {}_{K^*} \langle f(t), v(t) \rangle_K dt \end{array} \right.$$

On a alors le théorème :

Théorème - Sous les hypothèses (1), (2), (3), (4), et si :

$$(10) \quad H^{1/2}(\mathbb{R}^+; H) \subset L^2(\mathbb{R}^+; V(t)) + H^1(\mathbb{R}^+; K^*)$$

il existe une et une seule u satisfaisant (7), (8), (9).

L'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (6) en découlent : En effet, avec le choix de $K, H, V(t)$ indiqué plus haut, (10) est remplie pour n'importe lequel sous-ensemble Σ_0 de Σ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BAIOCCHI - Problemi misti per l'equazione del calore - Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano XLI (1971) p. 3-38.
- [2] R. W. CARROLL, J.M. COOPER -Remarks on some variable Domain Problems in Abstract Evolution Equations. Math. Annalen CLXXXVIII (1970) p. 143-160.
- [3] T. KATO, H. TANABE - On abstract evolution Equation. Osaka Math. J. XIV (1962) p. 107-133.
- [4] J. L. LIONS - Equations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert - Cours CIME 1963, éd. Cremonese.

Istituto di Matematica.
Università - PAVIA (Italie)
