

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARCO BIROLI

**Sur la solution bornée et presque périodique des  
inéquations d'évolution paraboliques**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 41-45

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1972\\_\\_31-32\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__41_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA SOLUTION BORNÉE ET PRESQUE PÉRIODIQUE  
 DES INÉQUATIONS D'ÉVOLUTION PARABOLIQUES

par

Marco BIROLI

---

§ 1 - CADRE FONCTIONNEL.

Soit  $V(X, W)$  un espace de Banach réel séparable de norme  $\| \cdot \|_X$ ,  $\| \cdot \|_W$ ; nous indiquons par  $V^*(X^*, W^*)$  son dual, par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualité entre  $V(X, W)$  et  $V^*(X^*, W^*)$  et par  $\| \cdot \|_X^*$ ,  $\| \cdot \|_W^*$  la norme duale sur  $V^*(X^*, W^*)$ .

Soit  $V(X)$  uniformément convexe.

Soit  $H$  un espace de Hilbert identifié avec son dual pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et indiquons par  $\| \cdot \|$  la norme sur  $H$  induite par  $(\cdot, \cdot)$ .

Nous supposons que  $V(X, W)$  soit identifié avec un sous-espace dense de  $H$  et que l'injection de  $V(X, W)$  dans  $H$  soit compacte (continue, compacte).

Nous supposons aussi que  $W$  soit identifié avec un sous-espace de  $X$  et que l'injection de  $W$  dans  $X$  soit compacte.

§ 2 - ENONCES.

Soit  $A : V \rightarrow V^*$  un opérateur (univoque) monotone, [6], hémicontinu borné et  $\varphi(u)$  une fonction convexe s.c.i. de  $V$  dans  $]-\infty, +\infty]$ ,  $\varphi(u) \neq +\infty$ , avec  $\varphi(u) \geq 0$ ; soit enfin  $\varphi(0) = 0$  et

$$(2.1) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle Au, u - v_0 \rangle + \varphi(u)}{\|u\|} = +\infty \quad v_0 \in D(\varphi) .$$

Supposons que  $\forall g \in X$  l'inéquation

$$(2.2) \quad \langle Au, v-u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle g, v-u \rangle \quad \forall v \in D(\varphi)$$

a une solution  $u \in X \cap D(\varphi)$  et que l'opérateur défini par la relation :

$$g \in Mu \text{ si et seulement si } g \in X \text{ et } u \in X \cap D(\varphi) \text{ vérifient (2.2).}$$

Soit  $m$ -accretif, [7], sur  $X$ .

Supposons en plus que si  $g \in Mu$

$$\|g\|_X \geq \alpha \|u\|_W \quad \alpha > 0 .$$

On a le résultat suivant :

THEOREME 1. - Considérons le problème :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &< \frac{du}{dt} + A u(t) + \lambda u(t), v-u(t) > + \varphi(v) - \varphi(u(t)) \geq \\ &\geq < f(t), v-u(t) > \text{ p.p. } \forall v \in D(\varphi), \lambda > 0 \end{aligned}$$

où  $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; X)$  et  $\frac{df}{dt}(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; X)$ . Le problème (2.3) a une unique solution  $u(t)$  bornée dans  $W$ .

Si  $f(t)$  est  $S^{1+\epsilon}$  presque périodique dans  $X$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $u(t)$  est faiblement presque périodique dans  $W$ .

Remarque 1 : Si  $X = H$  et on a (2.1), on peut déduire la condition (2.1) de (2.2) [5]. Si en plus  $\forall v_i \in V \quad i = 1, 2 :$

$$< Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 > \geq \alpha \|v_1 - v_2\|^2, \quad \alpha > 0$$

les conclusions du théorème 1 restent valables pour  $\lambda = 0$ .

Soit maintenant  $A = 0$ ,  $X = H$ . La fonction  $\varphi(u)$  a une extension s. c. i. sur  $H$  ([5])

$$\varphi_H(u) = \begin{aligned} &= \varphi(u) && \text{si } u \in D(\varphi) \\ &= +\infty && \text{si } u \in H \quad u \notin D(\varphi) . \end{aligned}$$

Indiquons par  $\partial\varphi_H(u)$  la sous-différentielle, [9] de  $\varphi_H(u)$ , qui est un opérateur  $m$ -monotone, [10] multivoque sur  $H$ .

THEOREME 2. - Soit  $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; H)$  et  $\frac{df}{dt}(t)$   $S^1$ -bornée dans  $H$ ; le problème

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi_H(u(t)) + \lambda u(t) = f(t) \quad \text{p.p. } \lambda > 0$$

a une unique solution bornée dans  $W$ .

Si  $f(t)$  est  $S^{1+\epsilon}$  presque périodique dans  $H$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $u(t)$  est faiblement presque périodique dans  $W$ .

Remarque 2 : Si on a  $\forall u_i \in D(\partial\varphi_H) \quad v_i \in \partial\varphi_H u_i \quad i = 1, 2 :$

$$(v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^p, \alpha > 0, p \geq 2$$

la conclusion du théorème 2 reste valable pour  $\lambda = 0$ .

THEOREME 3. - Si  $f(t)$  est  $S^2$ -bornée dans  $H$ , le problème :

$$\frac{du}{dt} + \alpha \varphi_H(u(t)) + \lambda u(t) = f(t) \quad \text{p.p. } \lambda > 0$$

a une unique solution  $u(t)$  bornée dans  $H$ ,  $S^2$ -bornée dans  $W$  et avec  $\varphi(u(t))$  bornée.

Si  $f(t)$  est  $S^2$ -presque périodique dans  $H$ ,  $u(t)$  est faiblement  $S^2$ -presque périodique dans  $W$  et presque périodique faiblement dans  $V$ .

Remarque 3 : Si on a  $\forall u_i \in D(\alpha \varphi_H) \quad v_i \in \alpha \varphi_H u_i \quad i = 1, 2$

$$(v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^p \quad p \geq 2, \alpha > 0$$

les conclusions du théorème 3 restent valables pour  $\lambda = 0$  et si  $f(t)$  est  $S^2$  presque périodique dans  $H$ ,  $u(t)$  est  $S^p$  presque périodique dans  $V$ .

On peut considérer aussi  $f(t)$  moins régulière. Supposons que  $\varphi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_a(u)$  où  $\varphi_1(u)$  ( $\varphi_2(u)$ ) est une fonction convexe s.c.i. sur  $V$  dans  $]-\infty, +\infty]$  non négative ;  $\varphi_1(u)$  a dérivée de Fréchet  $A : V \rightarrow V^*$ , tel que  $\forall v_i \in V \quad i = 1, 2$

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle \geq \alpha \|v_1 - v_2\|^p \quad \alpha > 0, p \geq 2$$

$$\|Av\|^* \leq K_1 \|v\|^{p-1} + K_2 \quad \forall v \in V.$$

THEOREME 4. - Soit  $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; V^*)$  avec  $\frac{df}{dt}(t)$   $S^1$ -bornée dans  $V^*$ ; le problème

$$\left\langle \frac{dv}{dt} + A u(t) - f(t), v - u(t) \right\rangle + \varphi_2(v) - \varphi_2(u(t)) \geq 0$$

$$\text{p.p. } \forall v \in D(\varphi_2),$$

a une unique solution bornée dans  $V$  avec  $\varphi_2(u(t))$  bornée.

Si  $f(t)$  est  $S^{1+\varepsilon}$  presque périodique  $\varepsilon > 0$ ,  $u(t)$  est  $S^p$ -presque périodique dans  $V$  et faiblement presque périodique dans  $V$ .

THEOREME 5. - Soit  $f(t)$   $S^{p'}$ -bornée dans  $V^*$  ( $p'$  index conjugué à  $p$ ) ; le problème

$$\int_{t_1}^{t_2} < \frac{dv}{dt}, v(t)-u(t) > + < Au(t), v(t)-u(t) > + \varphi_2(v(t)) - \varphi_2(u(t)) - \\ - < f(t), v(t)-u(t) > \} dt \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2)-u(t_2)|^2 - |v(t_1)-u(t_1)|^2 \}$$

$$t_1 \leq t_2 \quad \forall v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbb{R}; V) \quad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbb{R}; H),$$

$$\varphi_2(v(t)) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}).$$

$$u(t) \in C(\mathbb{R}; H) \cap \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbb{R}; V), \quad \varphi_2(u(t)) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$$

a une unique solution  $u(t)$  bornée dans  $H$  et  $S^p$ -bornée dans  $V$ .

Si  $f(t)$  est  $S^{p'}$ -presque périodique dans  $V^*$ ,  $u(t)$  est presque pé-  
riodique dans  $H$  et  $S^p$ -presque périodique dans  $V$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMERIO (L.), PROUSE (G.). - Functional analysis and almost periodic functions. Van Nostrand 1970.
- [2] BIROLI (M.). - Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution avec des fonctionnelles non différentiables. Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. XLIV (1970), p. 299-318.
- [3] BIROLI (M.). - Sulla esistenza ed unicità della soluzione limitata e della soluzione quasi periodica per una equazione parabolica con termine dissipativo non lineare discontinuo. Ricerche di matematica, Vol. XIX (1970), p. 93-110.
- [4] BIROLI (M.). - Solutions bornées et presque périodiques des inéquations d'évolution. A paraître Annali di matematica.
- [5] BREZIS (H.). - Problèmes unilatéraux. A paraître. Thèse de Doctorat d'Etat.
- [6] CRANDALL (M.), PAZY (G.). - Semigroups of non-linear contractions and dissipative sets. Journ. of functional analysis fasc. 3, (1969), p. 376-418.
- [7] CRANDALL (M.), PAZY (G.). - On accretive sets in Banach spaces. Journ. of functional Analysis, fasc. 2 (1970), p. 204-217.
- [8] PALMIERI (G.). - Soluzioni limitate o quasi periodiche dell' equazione del calore non lineare con discontinuità rispetto all' incognita. Rend. Iet. Lombardo, Vol. 104 (1970), p. 746-757.

- [9] ROCKAFELLAR (T.). - On the maximal monotonicity of subdifferential mappings.  
Michigan J. of mathematics, 1970.
- [10] ROCKAFELLAR (T.). - Convex analysis. Princeton University Press, 1969.

Mareo BIROLI  
Via Marcona, 15  
I 20129 MILANO (Italie)

---