

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANCINE CNOP-GRANDSARD

Fonctions holomorphes à croissance et à valeurs dans un b -espace

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 105-107

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__105_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE ET À VALEURS DANS UN b-ESPACE

par

Francine CNOP-GRANDSARD

1. Soit δ une fonction bornée, non négative, lipschitzienne sur \mathbb{T}^n , avec la propriété que $|z|\delta(z)$ soit bornée. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{T}^n \mid \delta(z) > 0\}$.

Nous définissons l'espace $\mathcal{O}(\delta)$ des fonctions holomorphes δ -tempérées comme l'espace des fonctions f , définies et holomorphes sur Ω , qui ont la propriété suivante : il existe un entier positif N tel que $\delta^N(z) f(z)$ soit bornée sur Ω . $\mathcal{O}(\delta)$ est la réunion, pour N entier positif, des espaces de Banach $\mathcal{O}_N(\delta)$ des fonctions holomorphes f sur Ω telles que $\delta^N(z) f(z)$ soit bornée sur Ω . Les injections canoniques $\mathcal{O}_N(\delta) \rightarrow \mathcal{O}_{N+1}(\delta)$ étant compactes, l'espace $\mathcal{O}(\delta)$ est un espace de Silva.

Nous notons par $\mathcal{O}^*(\delta)$ le dual topologique de $\mathcal{O}(\delta)$, muni de la topologie forte. $\mathcal{O}^*(\delta)$ est un espace de Fréchet-Schwartz, et sa bornologie topologique est la bornologie équicontinue.

2. Soit E un espace localement convexe séparé (sur \mathbb{T}) avec bornologie topologique complétante. Une fonction f définie sur Ω et à valeurs dans E appartient à l'espace $\mathcal{O}(\delta, E)$ si elle est holomorphe sur Ω et si pour toute semi-norme v de E il existe un entier positif N tel que $\delta^N(z) f(z)$ soit bornée pour cette semi-norme.

Nous pouvons démontrer la caractérisation suivante :

THEOREME 1. - Soit E un espace localement convexe séparé (sur \mathbb{T}) avec bornologie topologique complétante. Soit f une fonction sur Ω à valeurs dans E avec la propriété que $x' \circ f \in \mathcal{O}(\delta)$ pour tout x' dans le dual de E . Alors $f \in \mathcal{O}(\delta, E)$.

3. Soit E un b-espace (sur \mathbb{T}) et f une fonction sur Ω à valeurs dans E . Nous disons que f appartient à l'espace $\mathcal{O}(\delta, E)$ s'il existe un borné complétant B dans E et un entier positif N tels que $f(\Omega) \subseteq E_B$, $f \in \mathcal{O}(\Omega, E_B)$, $\{\delta^N(z) f(z) \mid z \in \Omega\} \subseteq B$. L'espace $\mathcal{O}(\delta, E)$ est donc la réunion des espaces $\mathcal{O}(\delta, E_B)$, B borné complétant dans E .

Nous définissons une injection canonique

$$i : \Omega \rightarrow \mathcal{G}^*(\delta)$$

par $\langle i(z), f \rangle = f(z)$, pour tout $f \in \mathcal{G}(\delta)$.

Il résulte du théorème 1 que i appartient à l'espace $\mathcal{G}(\delta, \mathcal{G}^*(\delta))$, où $\mathcal{G}^*(\delta)$ est considéré comme espace localement convexe.

THEOREME 2. - Soit E un b-espace (sur \mathbb{T}) et $f \in \mathcal{G}(\delta, E)$. Alors il existe une application linéaire unique $\bar{f} : \mathcal{G}^*(\delta) \rightarrow E$, qui applique un certain voisinage de 0 dans $\mathcal{G}^*(\delta)$ sur un borné de E, et qui est telle que $f = \bar{f} \circ i$.

LEMME. - Soit E un b-espace (sur \mathbb{T}) et $f \in \mathcal{G}(\delta, E)$. Alors il existe un "disque compact" X dans E tel que $f(\Omega) \subseteq E_X$ et $f \in \mathcal{G}(\delta, E_X)$.

Nous appelons "disque compact" d'un b-espace E tout ensemble absolument convexe X qui est compact dans un certain espace E_B , B borné complétant.

Démonstration du lemme : Il existe un borné complétant B de E et un entier positif N tels que f soit holomorphe sur Ω à valeurs dans E_B et que l'ensemble $\{\delta^N(z) f(z) \mid z \in \Omega\}$ soit contenu dans B. La fonction δ étant bornée, nous pouvons choisir B de façon que $\{\delta^{N+1}(z) f(z) \mid z \in \Omega\}$ soit contenu dans B. Appelons X l'enveloppe absolument convexe fermée dans E_B de l'ensemble $\{\delta^{N+1}(z) f(z) \mid z \in \Omega\}$. Alors X est compact pour la topologie de E_B , et X est donc un "disque compact". Il est clair que $f(\Omega) \subseteq E_X$ et $f \in \mathcal{G}(\delta, E_X)$.

Démonstration du théorème 2 : Nous construisons l'application $\bar{f} : \mathcal{G}^*(\delta) \rightarrow E$ par dualité.

X est un "disque compact" dans E. L'espace E_X , engendré par X, est donc isomorphe au dual de l'espace de Banach F des formes linéaires sur E_X , dont la restriction à X est continue pour la topologie compacte de X, muni de la topologie de la convergence uniforme sur X ([2]).

Grâce au lemme, nous savons que $f \in \mathcal{G}(\delta, E_X)$.

Nous définissons une application linéaire $f' : F \rightarrow \mathcal{G}_{N+1}(\delta)$ par $f'(t) = t \circ f$, pour tout $t \in F$. L'application f' est continue. Soit $B_{N+1} = \{g \in \mathcal{G}_{N+1}(\delta) \mid \|g\|_{N+1} = \|\delta^{N+1} g\|_{\infty} \leq 1\}$, alors f' applique le polaire de X dans B_{N+1} . f' est une application linéaire continue de F dans $\mathcal{G}(\delta)$.

Par transposition, nous obtenons une application linéaire

$$\bar{F} : \mathcal{G}^*(\delta) \rightarrow \mathbb{F}^c = E_X \subseteq E$$

définie par $\langle \bar{F}(u), t \rangle = \langle u, f'(t) \rangle$, pour tout $u \in \mathcal{G}^*(\delta)$, $t \in \mathbb{F}$.

Le polaire de B_{N+1} est un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}^*(\delta)$ dont l'image par \bar{F} est bornée dans E_X , et donc à priori dans E .

$f = \bar{F} \circ i$. En effet, pour tout $z \in \Omega$ et $t \in \mathbb{F}$,
 $\langle \bar{F} \circ i(z), t \rangle = \langle i(z), f'(z) \rangle = f'(t)(z) = \langle f(z), t \rangle$.

\bar{F} est unique. Supposons que $\bar{F} \circ i = 0$. Le noyau de \bar{F} est alors un sous-espace vectoriel faiblement fermé K de $\mathcal{G}^*(\delta)$ qui contient $i(\Omega)$. Mais, un tel sous-espace n'existe pas. Donc $K = \mathcal{G}^*(\delta)$, et $\bar{F} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WAELBROECK (L.). - Etude spectrale des algèbres complètes. Acad. Roy. Bel-
gique, Mém. Cl. des Sc., 1960.
- [2] WAELBROECK (L.). - Some theorems about bounded structures. J. Funct. Anal. 1,
4, 1967, 392-408.

83, Avenue P. Curie
B 1050 BRUXELLES
(Belgique)
